



Костя собрался поступать в заочную физико-математическую школу и для тренировки стал разыскивать и решать вступительные задачи, предложенные в прежние годы¹. Одна из них вызвала у него особый интерес.

Условие задачи.

Лена загадала число: 1, 2 или 3. Костя хочет отгадать это число. Ему разрешается задать Лене один вопрос, на который Лена отвечает либо «да», либо «нет», либо «не знаю». Приведите пример вопроса, получив ответ на который, Костя смог бы однозначно определить загаданное Леной число.

– Ну и дела! – воскликнул Костя. – Меня как раз зовут Костей, а мою младшую сестру – Леной. Получается, эта задача прямо-таки про нас придумана!

Естественно, он не мог подойти к такой особенной задаче традиционно

и собрался не только найти несколько различных решений, но и проверить их экспериментально: предложить сестре задумать число, а потом задать придуманные вопросы и убедиться в своей правоте.

После нескольких часов утомительных рассуждений Костя имел все основания гордиться собой: он сумел сформулировать аж четыре принципиально различных варианта!

Первый вариант был таков:

– Допустим, я сам задумал некоторое *нечётное* число. Поделится ли без остатка моё число на твоё?

Подумаем, что должна ответить Лена. Если она задумала 1, то, незави-

¹ Рассматриваемая далее задача – реальная, действительно вошедшая в перечень задач вступительной работы на заочное отделение Малого мехмата МГУ в 2009 г. Была одновременно опубликована в различных журналах в начале 2009 г.



симо от Костиного числа, его число поделится на 1 (ведь на единицу делятся все целые числа!). Поэтому здесь Лена должна ответить «да». Если же Лена задумала 2, то можно гарантировать, что Костино число на Ленино не поделится, потому что его число, как он заранее объявил, заведомо нечётное. Значит, в этом случае Лена ответит «нет». Ну и, наконец, если Лена задумала 3, то всё зависит от Костиного числа: например, 9 делится на 3, а 5 – нет. Следовательно, ответом Лены будет «не знаю».

Второй вариант Костиного вопроса:

– Если я выберу одно из двух оставшихся чисел, то будет ли оно меньше того числа, которое ты задумала?

И здесь всё понятно. Если Лена выбрала 1, то Костя может выбрать либо 2, либо 3. В любом случае это число окажется больше 1. Поэтому Лена скажет

«нет». Если, наоборот, Лена выбрала 3, то Костя может выбрать либо 1, либо 2, и его число будет уж точно меньше 3. Так что Лена скажет «да». А вот если Лена задумала среднее число 2, то исход всецело зависит от Костиного числа (1 или 3), и оно может быть как больше, так и меньше Лениного. Значит, её ответ – «не знаю».

Третий вариант:

– Если мы обозначим задуманное тобой число через x , то будет ли число $\frac{2}{x-1}$ чётным?

Здесь Костя сам ничего не задумывает, и результат вроде бы predetermined. Но не тут-то было! Рассмотрим возможные варианты для удобства в обратном порядке. Если Лена задумала 3, то $\frac{2}{x-1} = \frac{2}{3-1} = \frac{2}{2} = 1$ – число нечётное. Стало быть, Лена ответит «нет». При задуманной двойке будет



$\frac{2}{x-1} = \frac{2}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$, и Лена скажет «да». Ну, а если задумано число 1? Тогда $x - 1 = 0$, и придется делить на ноль! Это вообще недопустимо, и уж тем более никто не в состоянии сказать, чётное или нечётное число получится в результате такого запрещенного действия. Так что Лена будет вынуждена сказать «не знаю».

Но больше всего Косте понравился *четвёртый вариант*:

– Давай договоримся, что если ты задумала 1, то ты скажешь «да», если 2 – то «нет», а если 3 – то «не знаю». Ну-ка, ответь, что ты задумала?

Здесь всё совершенно понятно и комментариев не требует.

Костя был так горд своими успехами, что не выдержал и составил таблицу, где указал для всех вариантов вопросов и ответов задуманное число:

Вариант вопроса	Ответ		
	да	нет	не знаю
Первый	1	2	3
Второй	3	1	2
Третий	2	3	1
Четвёртый	1	2	3

После столь основательной теоретической подготовки Костя позвал Лену и провёл «рабочие испытания» своих изысканий. Он попросил Лену задумать одно из трёх чисел (1, 2 или 3), а потом по очереди задал все 4 вопроса, заглядывая тайком в таблицу, чтобы удостовериться в своей прозорливости.

Результат потряс Костю: на все вопросы Лена ответила «не знаю»!

Костя был ошарашен и поначалу не смог сказать ни слова. Потом он, правда, сумел объяснить такие ответы Лены и даже верно назвал число, которое она задумала. А читатель сумеет?