НАШ КОНКУРС («Квантик» № 9)

41. *Даны 5 карточек, на них написаны дроби* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$. *Можно использовать некоторые (или все) карточки, знаки арифметических действий и скобки. Получите таким способом все целые числа от* 0 *до* 10.

Ответ: $0=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$; $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$; $2=\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$;

$3=\frac{1}{2}:\frac{1}{6}$; $4=\left(\frac{1}{3}:\frac{1}{6}\right):\frac{1}{2}$; $5=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):\frac{1}{6}$;

$6=\left(\frac{1}{2}:\frac{1}{3}\right):\frac{1}{4}$; $7=\left(\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right):\frac{1}{2}\right):\frac{1}{6}$; $8=\left(\frac{1}{3}:\frac{1}{6}\right):\frac{1}{4}$;

$9=\left(\frac{1}{2}:\frac{1}{6}\right):\frac{1}{3}$; $10=\left(\frac{1}{2}:\frac{1}{4}\right):\frac{1}{5}$.

Все числа от 11 до 20 тоже можно получить из данных карточек. Попробуйте это сделать.

42. *Загаданы четыре целых числа a, b, c, d. Разрешается выбрать любые три из них и спросить: их сумма чётная или нечётная? Как за три таких вопроса узнать, чётно или нечётно число a?*

Спросим, какова чётность чисел $a+b+c$, $a+b+d$ и $a+c+d$. Тогда мы узнаём чётность суммы этих чисел: $3a+2b+2c+2d$. Эта сумма имеет ту же чётность, что и a, поскольку отличается от a на чётное число.

43. *На Поле Чудес растут два дерева. Если закопать несколько золотых под одним из них, то к утру сумма удвоится, а если под другим – утроится. У Буратино есть* 100 *золотых, но он не знает, какое из деревьев удваивает сумму, а какое – утраивает. К утру у него должно быть ровно* 175 *золотых. Как ему этого добиться? (Он не обязан закапывать все свои золотые.)*

Ответ: под каждым из деревьев надо закопать 25 монет, а оставшиеся 50 монет не закапывать. На утро у Буратино будет $25\cdot2+25\cdot3+50=175$ монет.

Так как Буратино не знает, какое дерево удваивает, а какое утраивает, он вынужден закапывать одинаковое количество монет под обоими деревьями. Найти это количество x можно из уравнения $2x+3x+(100-2x)=175$.

44. *Имеется шахматная доска, у которой первоначально все клетки белые. Закрасим некоторые из них в чёрный цвет. Назовём раскраску изящной, если в каждой горизонтали и каждой вертикали закрашено ровно по 4 клетки (то есть обычная шахматная раскраска тоже изящная).*

Возьмём две произвольные изящные раскраски. Петя уверен, что если разрешить менять местами любые две горизонтали или любые две вертикали, то, совершив несколько таких операций, можно из первой раскраски получить вторую. Коля считает, что это не так. Кто прав?

Ответ: прав Коля.

Коля будет прав, если найдутся такие две раскраски, что из первой нельзя получить вторую. Посмотрим на две раскраски с рисунков 1 и 2. На первой найдутся две вертикали, в которых закрашенные клетки находятся на одних и тех же горизонталях. Например, это первая и вторая вертикали. Это свойство сохраняется при разрешённых операциях. Но на второй раскраске такой пары вертикалей нет. Значит, вторую раскраску нельзя получить из первой.

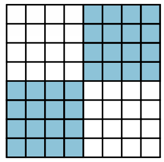

Рис. 1

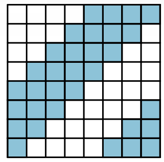

Рис. 2

45. *На плоскости отметили несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько точек могли отметить, если известно, что любой треугольник с вершинами в отмеченных точках будет непременно*

а) остроугольным; б) прямоугольным;

в) тупоугольным?

Найдите все ответы и докажите, что других нет.

а) Точек может быть 3, если это вершины остроугольного треугольника, а больше быть не может. Четыре точки могут расположиться на плоскости двумя способами: либо три из них образуют треугольник, внутри которого лежит четвёртая точка, либо это четыре вершины выпуклого четырёхугольника. В первом случае один из трёх треугольников с вершиной во внутренней точке будет тупоугольным, потому что сумма трёх углов при внутренней точке равна 360°. Во втором случае среди углов четырёхугольника найдётся неострый, потому что их сумма равна 360°.

б) Точек может быть 4, если это вершины прямоугольника, а больше быть не может. Как и в предыдущем пункте, найдём тупоугольный треугольник, если есть 5 точек. Если найдётся точка внутри треугольника с вершинами в трёх других, то как в пункте а) найдётся тупой угол. Если такой точки нет, то наши пять точек образуют выпуклый пятиугольник. Сумма его углов равна 540°. Значит, один из них тупой.

в) Точек может быть любое количество. Расположим точки на маленькой дуге окружности настолько близко друг к другу, что они лежат почти на одной прямой. Ясно, что любой треугольник с вершинами в точках будет почти как эта прямая, то есть тупоугольным

ДРЕВНЕЕ ПРИСПОСОБЛЕНИЕ («Квантик» № 10)

С помощью такой верёвочки можно отмерить прямой угол. Для этого надо соединить два крайних узелка и натянуть верёвочку так, чтобы получился прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5.

НАРУШИТЕЛИ СРЕДИ СЛОВ

Петербург – дословно *город Петра*, а *Питер* – его разговорное название, существующее почти со времён основания города. В частности, использовался вариант написания «Санкт-Питер-Бурх», от которого и произошло укороченное наименование. А различие в родственных словах связано с разными традициями передачи на письме имён собственных (ср. Пётр Иванович, но Питер Пэн). Похожую ситуацию можно наблюдать с именами *Григорий – Грегори*.

ПИКАССО, ВОЛЬФ МЕССИНГ И РАНЕВСКАЯ

Выдумана история про Мессинга. В то время во Франции в ходу были не евро, а франки. А ещё читателя должны были насторожить имя и фамилия гипнотизёра Тен Амбо (прочтите их с конца).

ГЕОМЕТРИЯ НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ. ЧАСТЬ 3

4. Сделаем чертёж на клетчатой бумаге, проведя также диагональ BD (рис. 1). Тогда $KBMD$ – невыпуклый четырёхугольник с тремя углами по 45°. Тем самым решение задачи сводится к решению задачи 1.

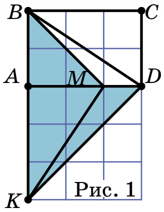

Рис. 1

5. Сделаем чертёж на клетчатой бумаге (рис. 2). Из условия следует, что $CD\perp KG$ (прямая CD перпендикулярна прямой KG). Докажем, что $GH\perp KC$. Действительно, GH и EC – это диагонали двух равных прямоугольников $GFHD$ и $EBCH$, причём чтобы наложить один прямоугольник на другой, нужно повернуть его на 90°. Таким образом, H – точка пересечения высот треугольника KCG. Значит, $KH\perp GC$.

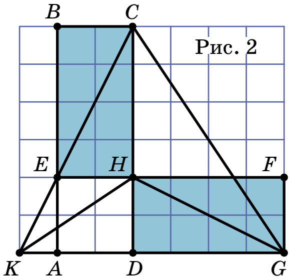

Рис. 2

6. Сделаем чертёж на клетчатой бумаге (рис. 3). Пусть прямые DP и BC пересекаются в точке M. Тогда прямоугольные треугольники DAP и MBP равны (по катету и острому углу). Следовательно, $MB = AD = BC$. Таким образом, QB – медиана прямоугольного треугольника MQC, значит, $BQ=\frac{1}{2}MC=BC$, что и требовалось.

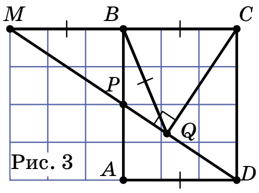

Рис. 3

Отметим, что точка Q может лежать и вне данного прямоугольника, но на приведённое решение это не влияет.

7. Сделаем чертёж на клетчатой бумаге (рис. 4). Из точки B опустим перпендикуляр BK на прямую DC, тогда $\angle KBC = \angle HBA$ (острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Следовательно, равны прямоугольные треугольники KBC и HBA (по гипотенузе и острому углу), то есть прямоугольник $BKDH$ – квадрат. Значит, $S_{ABCD} = S_{BKDH} = BH^2 = 9$.

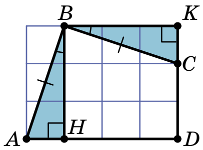

Рис. 4

8. Сделаем чертёж на клетчатой бумаге (рис. 5). Пусть $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$. Так как $\angle DAC = 45°$, то $\angle BDA = 45° + \alpha$. Кроме того, $\angle BDE = 90°$, значит, $\angle EDA = \alpha - 45° = \angle EAD$. Следовательно, $DE = AE$.

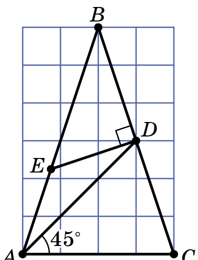

Рис. 5

9. а) Сделаем чертёж на клетчатой бумаге (рис. 6). Пусть K – середина AB, тогда $KD\parallel BF$. Если KD пересекает AP в точке N, то KN – средняя линия треугольника ABP, то есть N – середина AP. Кроме того, из равенства треугольников ABE и DAK следует, что $KD\perp AE$. Поэтому DN – высота и медиана треугольника ADP, значит, $DP = DA$.

б) Так как AED и ADP – равнобедренные треугольники с общим углом PAD при основании, то равны углы при их вершинах: $\angle AED = \angle ADP$.

в) Из доказанного в пункте а) следует, что $\angle DAP = \angle DPA$ и $\angle DPC = \angle DCP$. Значит, сумма углов четырёхугольника $APCD$ (равная 360°) равна сумме удвоенного угла APC и прямого угла. Следовательно, $\angle APC = (360° - 90°) : 2 = 135°$. Так как $\angle APB = 90°$, то сумма углов APC и BPC равна 270°, значит, $\angle BPC = 135°$.

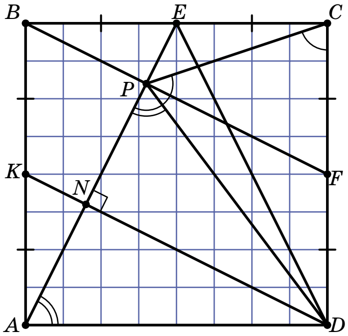

Рис. 6

XXI ТУРНИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ БОЁВ ИМЕНИ А. П. САВИНА

1. Ответ: $403\times5=2015$ и $13\times31=403$.

Всего букв 6 и возможных цифр 6. Значит, каждой цифре соответствует одна буква. Какой букве соответствует цифра 0? Все буквы, кроме буквы О, встречаются на первом месте. Значит, нулём может быть только буква О.

Так как О = 0, то первый ребус распадается на два: Ш × А = ДО и У × А = МА. В каких случаях получается двузначное число, если перемножить две разные цифры не больше 5? Это $3\times4=12$, $2\times5=10$, $3\times5=15$ и $4\times5=20$. Из четырёх вариантов только $3\times5=15$ подходит для ребуса У × А = МА, то есть У = 3, А = 5, М = 1. Для Ш остаётся одна возможность: Ш = 4.

2. Ответ: 34.

На 0 и 5 такое число оканчиваться не может (проверьте).

Найдём сначала, сколько таких чётных двузначных чисел. Если применять операцию, последняя цифра меняется по циклу: 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6... За один цикл число увеличивается на сумму цифр 2, 4, 8 и 6, то есть на 20. Так, из числа 16 за 100 циклов получится 2016. Получаем цепочку из 17 чисел 16, 22, 24, 28, 36, 42, 44, ..., 96, из которых можно получить 2016. Другая цепочка чисел к 2016 не приводит: 12, 14, 18, 26, 32, 34, 38, 46, ... 98.

Каждое чётное число получается из нечётного числа за одну операцию, причём такое нечётное число единственно. Например, $16 = 13 + 3$, $52 = 51 + 1$, $60 = 55 + 5$. Поэтому, кроме найденных 17 чётных чисел, есть ещё столько же нечётных, из которых можно получить 2016.

3. Обозначим купцов буквой «К», а разбойников – буквой «Р», умеющих грести – заглавной буквой, не умеющих – строчной. Возможный алгоритм переправы показан в таблице.

Левый берег	*Лодка*	*Правый берег*
Р р р	--------	К к к к
р р	Р →	К к к к
р р	← К к	Р к к
р к	К р →	Р к к
р к	← Р к	К к р
к к	Р р →	К к р
к к	← К к	Р р р
К к к к	--------	Р р р

4. Ответ: ни одного.

Пусть последний гном, оставшийся в комнате, – рыцарь. Тогда утверждение «Все оставшиеся в комнате –

лжецы» неверно ни в какой момент. Если Белоснежка тоже рыцарь, то все гномы лгали. Но тогда и утверждение Белоснежки неверно, и она не может быть рыцарем. А если Белоснежка лжец, то все гномы говорили правду, поэтому они рыцари. Но тогда Белоснежка сказала правду и не могла оказаться лжецом.

Итак, последним в комнате остался лжец. Если Белоснежка – рыцарь, то предпоследний гном сказал правду, поэтому остальные гномы солгали, и высказывание рыцаря-Белоснежки ложно. Остается признать, что Белоснежка – лжец. Тогда высказывания всех гномов ложны, и противоречий нет.

5. Ответ: $15°$.

Из условия задачи следует, что угол ABC равен $45°$. Проведём высоту CD, тогда $\angle DCB = 45° = \angle DBC$, значит, $BD = CD$ (рис. 1). В прямоугольном треугольнике ACD катет CD, лежащий напротив угла $30°$, равен половине гипотенузы AC, то есть $CD = CM$. Учитывая, что $\angle DCM = 60°$, получим: треугольник CMD – равносторонний, следовательно $MD = CD = BD$, то есть треугольник BDM – равнобедренный. Его внешний угол ADM равен $30°$, значит, $\angle DBM = 15°$.

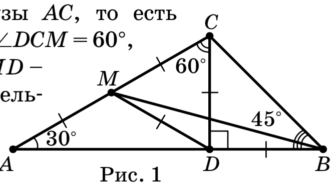

Рис. 1

6. Ответ: $BK : LM = 2 : 1$.

Продлим медиану BM и отметим точку D так, что $DM = BM$ (рис. 2). Тогда $\Delta AMD = \Delta CMB$ (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $AD = CB = AK$.

В равнобедренном треугольнике DAK проведём высоту AN, тогда N – середина DK (по свойству равнобедренного треугольника). Тогда $BK = MB - MK = MD - MK = (ND + NM) - (NK - NM) = 2NM$.

Но $\Delta AMN = \Delta CML$ (прямоугольные, по гипотенузе и острому углу). Следовательно, $NM = LM$ и $BK = 2LM$.

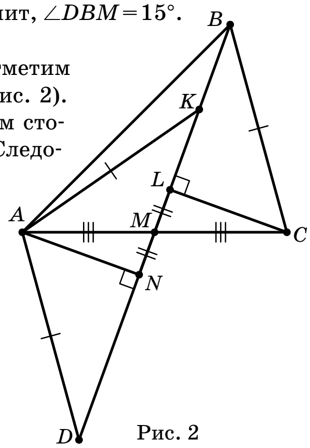

Рис. 2

7. Ответ: можно.

Рассмотрим, например, квадрат со стороной 6 и разрежем его так, как показано на рисунке 3. Каждая из шести фигур имеет площадь 6 и периметр 14.

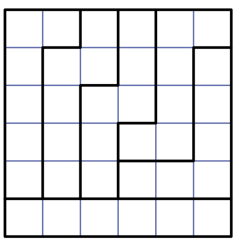
Рис. 3

8. Ответ: могло.

Например, искомый четырёхугольник $ABCD$ составлен из равностороннего треугольника ABC со стороной 10 см и равнобедренного треугольника ADC, у которого $\angle ADC \geqslant 150°$ (рис. 4). В этом случае он разрезается на треугольник ADC и три равных равнобедренных треугольника AOB, BOC и COA. У каждого из этих четырёх треугольников большая сторона равна 10 см. При этом в треугольнике ABD: $\angle ADB \geqslant 75°$, $\angle ABD = 30°$, значит, $\angle BAD \leqslant 75°$, поэтому $BD \leqslant AB = AC = 10$ см.

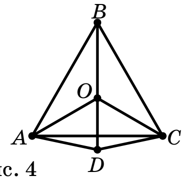

Рис. 4

9. Ответ: недостаточно.

Рассмотрим две такие колоды: в одной из них сверху лежит туз пик, затем король пик и так далее до двойки пик, затем в том же порядке все червовые, затем бубновые и трефовые карты; во второй колоде масти лежат в том же порядке, но в каждой из них карты лежат наоборот: от двойки до туза. Наборы расстояний между картами одной масти и одного достоинства для этих двух колод одинаковы. Следовательно, указанной информации не хватит.

10. Ответ: нет.

Мы покажем, что у Фомы есть способ получить не меньше половины золота независимо от действий Ерёмы. Пусть Ерёма разложил кучки, а Фома отдал первую кучку Ерёме. Если у Ерёмы нет стратегии, как в этом случае получить больше половины золота независимо от дальнейших действий Фомы, то доказывать нечего. Если же такая стратегия есть, то Фома должен взять первую кучку себе и воспользоваться этой стратегией.

РУССКИЙ МЕДВЕЖОНОК

1. Все приведённые слова обозначают парные части тела. Однако если плечо, глаз, бок и щека могут быть правыми и левыми (то есть рассматриваются в горизонтальной плоскости), то губа может быть верхней или нижней (то есть рассматривается в вертикальной плоскости). **Ответ:** (Г).

2. Чисел, первое слово в названии которых начинается на *Д*, а второе – на *О*, в русском языке **шесть**: 21 (*двадцать один*), 91 (*девяносто один*), 201 (*двести один*), 211 (*двести одиннадцать*), 901 (*девятьсот один*), 911 (*девятьсот одиннадцать*). **Ответ:** (В).

3. Во всех предложениях, кроме одного, слово *свой* относится к подлежащему: в (А) слово живёт жизнью самого слова, в (Б) дело, в которое ты лезешь, не твоё, и так далее. И только во фразе (В) слово *свой* относится к дополнению – иначе получилось бы, что вещи получают имена дипломатов. Устойчивое сочетание *называть вещи своими именами* является исключением из правил, по которым в русском языке обычно употребляется местоимение *свой*. **Ответ:** (В).

4. Традиционные славянские названия месяцев, как правило, связаны либо с природными явлениями, характерными для соответствующего времени, либо с сезонными сельскохозяйственными работами. Название украинского месяца *серпень* происходит от слова *серп*. Теперь попробуем разобраться с происхождением белорусских названий месяцев: *лістапад* – *листья* и *падать* (месяц, когда с деревьев падают листья), *жнівень* – *жать* (месяц, когда жнут, то есть собирают урожай), *снежань* – *снег* (месяц, когда выпадает много снега), *ліпень* – *липа* (месяц, когда цветут липы), *травень* – *трава* (месяц, когда всюду зеленеет трава).

Серп используют, чтобы жать. Значит, украинский *серпень* соответствует белорусскому месяцу *жнівень*. **Ответ:** (Б).

Переводы белорусских названий месяцев: лістапад – ноябрь, жнівень – август, снежань – декабрь, ліпень – июль, травень – май.