



ОСЕННИЙ ТУР, 8 - 9 КЛАССЫ

11 и 25 октября 2015 года состоялся осенний тур XXXVII Турнира городов – международного математического соревнования для школьников. Приводим все задачи базового варианта и избранные задачи сложного варианта для 8–9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов.

Базовый вариант

1 (3 балла). Верно ли, что любое натуральное число можно умножить на одно из чисел 1, 2, 3, 4 или 5 так, чтобы результат начинался на цифру 1?

Егор Бакаев

2 (4 балла). Из одинаковых неравносторонних прямоугольных треугольников составили прямоугольник (без дырок и наложений). Обязательно ли какие-то два из этих треугольников расположены так, что образуют прямоугольник?

Егор Бакаев

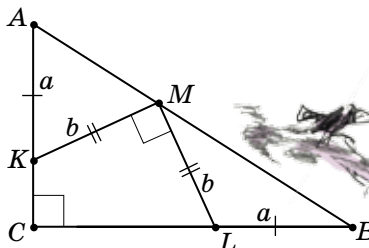
3 (5 баллов). Трое играют в «камень-ножницы-бумагу». В каждом раунде каждый наугад показывает «камень», «ножницы» или «бумагу». «Камень» побеждает «ножницы», «ножницы» побеждают «бумагу», «бумага» побеждает «камень». Если в раунде было показано ровно два различных элемента (и значит, один из них показали дважды), то игроки (или игрок), показавшие победивший элемент, получают по 1 баллу; иначе баллы никому не начисляются. После нескольких раундов оказалось, что все элементы были показаны одинаковое количество раз. Докажите, что в этот момент сумма набранных всеми баллов делилась на 3.

Егор Бакаев





4 (5 баллов). На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC отметили точки K и L соответственно, а на гипотенузе AB – точку M так, что $AK = BL = a$, $KM = LM = b$ и угол KML прямой. Докажите, что $a = b$.



Егор Бакаев

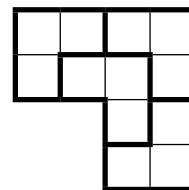
5. В стране 100 городов, между каждым двумя городами осуществляется беспосадочный перелёт. Все рейсы платные и стоят положительное (возможно, нецелое) число эре. Для любой пары городов A и B перелёт из A в B стоит столько же, сколько перелёт из B в A . Средняя стоимость перелёта равна 1 эре. Путешественник хочет облететь какие-нибудь m разных городов за m перелётов, начав и закончив в своём родном городе. Всегда ли ему удастся совершить такое путешествие, потратив на билеты не более m эре, если

- а) (3 балла) $m = 99$;
- б) (3 балла) $m = 100$?

Егор Бакаев

Избранные задачи сложного варианта

1. Будем называть клетчатый многоугольник *выдающимся*, если он не является прямоугольником и из нескольких его копий можно сложить подобный ему многоугольник. Например, уголок из трёх клеток – выдающийся многоугольник (это видно из рисунка справа).





а) (2 балла) Придумайте выдающийся многоугольник из 4 клеток.

б) (3 балла) При каких $n > 4$ существует выдающийся многоугольник из n клеток?

Егор Бакаев

2. Из целых чисел от 1 до 100 удалили k чисел. Обязательно ли среди оставшихся чисел можно выбрать k различных чисел с суммой 100, если

а) (2 балла) $k = 9$;

б) (4 балла) $k = 8$?

Александр Шаповалов

3. (8 баллов) Из спичек сложен клетчатый квадрат 9×9 , сторона каждой клетки – одна спичка. Петя и Вася по очереди убирают по спичке, начинает Петя. Выиграет тот, после чьего хода не останется целых квадратиков 1×1 . Кто может действовать так, чтобы обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

Александр Шаповалов

4. Петя увидел на доске несколько различных чисел и решил составить выражение, среди значений которого все эти числа есть, а других нет. Составляя выражение, Петя может использовать какие угодно числа, особый знак « $\pm$ », а также обычные знаки « $+$ », « $-$ », « $\times$ » и скобки. Значения составленного выражения он вычисляет, выбирая для каждого знака « $\pm$ » либо « $+$ », либо « $-$ » во всех возможных комбинациях. Например, если на доске были числа 4 и 6, подойдёт выражение 5 ± 1 , а если на доске были числа 1, 2 и 3, то подойдёт выражение $(2 \pm 0,5) \pm 0,5$. Возможно ли составить необходимое выражение, если на доске были написаны

а) (3 балла) числа 1, 2, 4;

б) (7 баллов) любые 100 различных чисел?

Ко Бонгюн (Южная Корея)



Художник Сергей Чуб