ЛИТЕРАТУРА И МАТЕМАТИКА
(«Квантик» №11, 2015 год)

1. *На мельницу доставили четыреста пятьдесят мешков ржи, по восемьдесят килограммов в каждом. Рожь смололи, причём из шести килограммов зерна вышло пять килограммов муки. Сколько понадобилось машин для перевозки всей муки, если на каждой машине помещалось по три тонны муки?*

Из рассказа Николая Носова «Федина задача»

В 450 мешках привезли $450 \cdot 80$ кг ржи, из которой сделали $450 \cdot 80 \cdot \frac{5}{6}$ кг муки и увезли на $\frac{450 \cdot 80 \cdot \frac{5}{6}}{3000}$ машинах. Сделав сокращения, получим ответ: 10 машин.

2. *Стоит четырёхэтажный дом, в каждом этаже по восьми окон, на крыше – два слуховых окна и две трубы, в каждом этаже по два квартиранта. В каком году умерла у швейцара бабушка?*

Из романа Ярослава Гашека
«Похождения бравого солдата Швейка
во время мировой войны»

Данных недостаточно, чтобы установить год смерти бабушки.

3. *Купец купил 138 аршин чёрного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а чёрное 3 руб. за аршин.*

Из рассказа Антона Чехова «Репетитор»

Пусть было x аршин чёрного сукна и y аршин синего. Составим два уравнения: $x+y=138$ и $3x+5y=540$. Домножив обе части первого уравнения на 3 и вычтя результаты из частей второго, находим $y = \frac{540-138 \cdot 3}{2} = 270-69 \cdot 3 = 270-(70-1) \cdot 3 = 270-210+3 = 63$. Из первого уравнения находим $x = 138 - y = 138 - 63 = 75$.

4. *Одному учёному нужно было узнать, сколько в пруду рыб. Для этого он забросил сеть и поймал тридцать штук. Каждую рыбу он окольцевал и выпустил обратно. На другой день он снова забросил сеть и вытащил сорок рыб, на двух из которых оказались кольца. И учёный вычислил, сколько приблизительно рыб в пруду. Как он это сделал?*

Из повести Владимира Тендрякова
«Весенние перевёртыши»

Только две рыбы из сорока вытащенных во второй раз были окольцованы. Значит, в пруду окольцованных рыб примерно каждая двадцатая. Окольцевал он всего 30 рыб. Значит, рыб в пруду примерно $30 \cdot 20 = 600$.

Поздравляем ребят, решивших все четыре задачи! Это

Бейлин Александр (5 класс, лицей 58 г. Ростова-на-Дону),
Мосейчева Юлия (5 класс, школа 57 г. Москвы),
Савченко Арсений (5 класс, школа 5 г. Магнитогорска),
Сорвин Лев (6 класс, гимназия 610 г. Санкт-Петербурга),
Федоровский Артур (5-й класс, школа 30 г. Волжского),
Ясников Алексей (7 класс, школа 58 г. Тольятти).

КАК ВЫЙТИ ИЗ ЛЕСА?
(«Квантик» №12, 2015 год)

Пусть грибник находится в некоторой точке O. Чтобы грибник заведомо вышел из леса, его путь должен пересекать любую прямую, отстоящую от точки O на расстояние 1 км. Например, как на рисунке а: сначала грибник идёт 1 км до точки O', а потом по окружности радиуса 1 км с центром в O. Длина пути равна $1+2\pi \approx 7{,}3$ км. Можно короче, как на рисунке б. Вместо последней четверти окружности грибник пройдёт по перпендикуляру до прямой L – касательной к окружности в точке O': длина $2+\frac{3}{2}\cdot\pi \approx 6{,}7$ км.

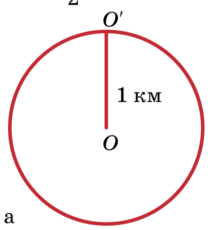


Рис. а

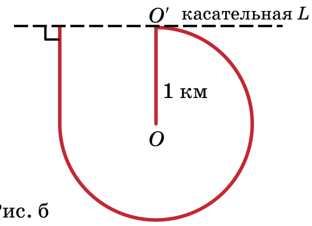


Рис. б

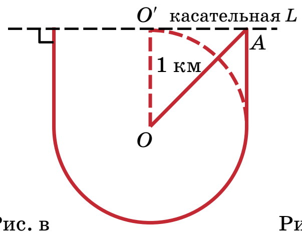


Рис. в

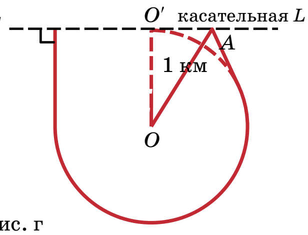


Рис. г

Можно ещё короче. Пусть A – точка на прямой L. Грибник сначала пойдёт до точки A, потом по касательной до окружности, а потом как раньше. Если $O'A = 1$, то он пройдёт $\sqrt{2}+2+\pi \approx 6{,}55$ км (рисунок в). OA можно найти по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника OAO', а отрезок касательной равен AO', потому что любые две касательные к окружности, проведённые из одной точки, равны.

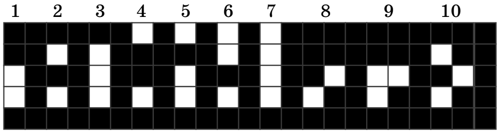
Возьмём теперь $AO' = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Проверьте, что тогда угол $O'OA$ равен 30° (рисунок г). Длина пути будет равна

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\pi}{6}+\pi+1=\sqrt{3}+\frac{7\pi}{6}+1 \approx 6{,}397 < 6{,}4 \text{ км}.$$

Примечание. Точку A можно найти так: пусть O'' – точка, симметричная точке O относительно прямой L; тогда отрезок касательной из точки O'' к окружности пересечёт прямую L в точке A. Именно для этой точки A путь грибника (среди путей вида, изображённого на рисунке г) будет кратчайшим, и вот почему. По симметрии $OA = O''A$, поэтому если начало пути пройти по отрезку $O''A$ вместо отрезка OA, то длина останется прежней. Наконец, от точки O'' идти до окружности короче всего по касательной.

ТЕЛЕСКОП АРЕСИБО

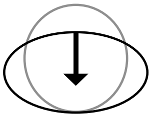
Диаграмма представляет числа от 1 до 10 в двоичной системе: 00001, 00010, 00011, 00100, 00101, 00110, 00111, 01000, 01001, 01010. Белые клетки обозначают 1, чёрные – 0. Белые клетки в предпоследнем ряду являются маркерами положения нового числа и не обозначают никакую цифру.



ВЕЛОЗАДАЧИ

1. Больше всего спица напрягается тогда, когда на неё (через ось колеса) ложится вес телеги, то есть когда спица находится внизу.

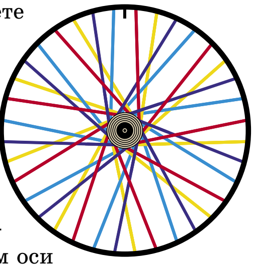
2. В велосипедном колесе ось не опирается на спицы (они бы легко согнулись под таким весом), а висит на спицах, так что больше нагружены верхние спицы, а не нижние.



Но это не всё: если бы натягивались только верхние спицы, они бы притянули верх обода и он бы сплющился (см. рис.). Менять форму ободу не позволяют все спицы, своим натяжением стягивающие обод. Без нагрузки эти все спицы натянуты в среднем одинаково, но когда мы ставим велосипед на пол и садимся на него, нижние спицы могут расслабиться: теперь обод не притягивается спицами к оси, а толкается полом.

3. Спицы призваны делать колесо жёстким, предотвращать любые его деформации. Почему обод сложно сдвинуть в направлении оси колеса? Его должны удерживать на месте спицы. Если бы они все шли в плоскости колеса, то как их ни натягивай, они не создадут заметной силы, направленной поперёк колеса. Поэтому, чтобы колесо не болталось вправо-влево, спицы ведут наклонно: одни отклоняются к левому диску на оси и не дают ободу двигаться вправо относительно оси, другие – к правому и не дают ободу двигаться влево относительно оси.

4. Причина, по большому счёту, та же, что и в задаче 3. Крутя педали, вы вращаете по цепи осевую часть колеса. Если бы спицы шли по радиусам, то им бы потребовалось огромное натяжение, чтобы быстро передать вращение оси ободу, ведь они тянут обод к центру, что не создаёт вращательного момента. А так половина спиц (синие) расположены под углом, позволяющим оси легко разгонять колесо против часовой стрелки, а половина спиц – в противоположном. Обычно их натяжения скомпенсированы, но когда мы разгоняемся или тормозим дисковыми тормозами, половина натягивается немного сильнее, половина немного ослабляется.



КОНСТРУКЦИИ ИЗ ДНК

Вторая нить ДНК однозначно определяется по первой нити, поэтому достаточно оценить минимальную длину одной нити. На каждом месте может стоять один из четырёх нуклеотидов – А, Т, Г или Ц. Если длина равна 16, то количество возможных нитей равно $4^{16} = 4294967296$, что меньше семи миллиардов. Значит, длина как минимум 17. На самом деле длина ДНК человека обычно несколько миллиардов нуклеотидов.

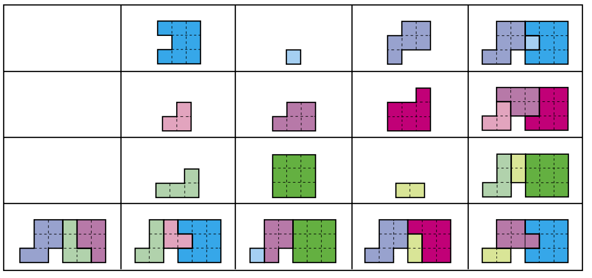
МЕСТЬ СТАТУИ, ЧЕМПИОН ПОНЕВОЛЕ И НЕЧЕСТНЫЙ СУДЬЯ

Выдумана, конечно, история про нечаянного победителя-бегуна. Во-первых, на первых олимпиадах женщин не допускали на стадионы даже в качестве зрителей. Во-вторых, креститься люди начали гораздо позже, после появления христианства.

КАК БУСЕНЬКА УКРАШАЛА ТОРТ

Этот удивительный магический квадрат со слониками взят со страницы http://puzzlezapper.com/blog/2011/01/magic-squares-and-polyominoes/

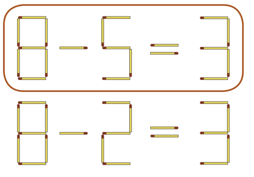
В приведённой табличке снаружи от квадратика 3×3 возле каждого горизонтального, вертикального и диагонального ряда показано, как следует составлять слоников из фигурок этого ряда.



Превращение обычных магических квадратов в магические квадраты с геометрическими узорами – это настоящее искусство. Квантик писал об этом в № 5 за 2013 год. Только настоящая Бусенька может справиться с такой задачей походя, за пару минут. Обычному человеку понадобится для этого немало времени, терпения и удачи.

НА ВОКЗАЛЕ

- Дупл или дупел.
- Преступником был единственный пассажир, не имевший при себе никакого багажа.
- Надо поставить зеркало, и в отражении получится верное равенство.



XXXVII ТУРНИР ГОРОДОВ

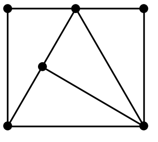
Базовый вариант

1. Ответ: верно.

Числа, начинающиеся с 1, умножим на 1. Докажем, что числа, начинающиеся с 2 или 3, достаточно умножить на 5. Пусть у нас есть такое число и в нём n цифр. Тогда оно больше или равно 20...0, но меньше 40...0 (число нулей везде $n - 1$). После умножения мы получим число, больше или равное 10...0, но меньшее 20...0 (число нулей везде n), то есть результат начинается на 1. Аналогично доказывается, что числа, начинающиеся с 4, можно умножить на 3 (или на 4), а числа, начинающиеся на 5, 6, 7, 8 или 9 – на 2.

2. Ответ: не обязательно.

Например, возьмём равносторонний треугольник и приложим к двум его сторонам гипотенузами прямоугольные треугольники с углом 60° при общей вершине (см. рисунок). Осталось



разрезать равносторонний треугольник высотой из другой вершины.

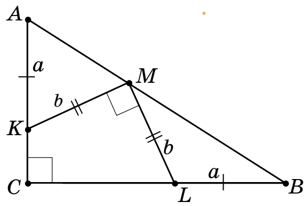
3. Будем обозначать через H количество показанных ножниц, а через K – количество показанных камней.

Докажем, что после любого количества раундов остаток от деления общего числа баллов на 3 будет такой же, как у $H-K$. Этого достаточно для решения задачи, потому что в итоге ножниц и камней было показано поровну. Чтобы доказать равенство остатков, покажем, что они меняются одинаково при любом исходе раунда. Если все игроки выкидывают один и тот же элемент, то общее число баллов не меняется, а $H-K$ либо не меняется, либо изменяется на 3. В любом случае остатки на 3 остаются прежними. Остальные исходы раундов показаны в таблице:

	ККН	КНН	КББ	ККБ	НББ	ННБ
очки	+2	+1	+2	+1	+1	+2
Н–К	–1	+1	–1	–2	+1	+2

Из таблицы видно, что остатки от деления на 3 у общего числа баллов и у $H-K$ меняются одинаково. Так как в самом начале остатки равны нулю, то они совпадают после любого числа раундов.

4. Предположим, что $a>b$. Так как в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, то для треугольника AKM получаем: $\angle AMK>\angle A$. Следовательно, $\angle B=90°-\angle A>90°-\angle AMK=\angle BML$, и из треугольника BML получаем, что $b>a$. Противоречие.



Аналогично, к противоречию приводит предположение $a<b$.

5. Заметим сначала, что рейс определяется своими начальным и конечным пунктами. Выбрать начальный город мы можем 100 способами, и после этого у нас есть 99 вариантов для конечного города. Итого получаем $100\cdot 99$ возможных рейсов.

а) **Ответ:** не всегда.

Пусть все 99 рейсов из родного города и все 99 рейсов в родной город стоят по 49,6 эре. Это возможно, поскольку суммарная стоимость этих рейсов равна $99{,}2\cdot 99$ эре, что меньше общей стоимости. Цену на оставшиеся рейсы подберём так, чтобы довести суммарную стоимость до $100\cdot 99$. Тогда, чтобы вылететь из родного города, а потом вернуться в него, надо уже потратить больше 99 эре.

б) **Ответ:** всегда.

Вылететь из родного города можно в один из остальных 99 городов, из того – в любой из 98 оставшихся, и так далее (последним рейсом возвращаемся в свой родной город). Значит, всего имеется $99\cdot 98\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1==99!$ вариантов маршрутов.

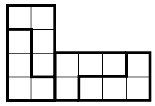
В скольких маршрутах встретится любой конкретный перелёт? Сделав этот перелёт, дальше мы можем полететь в один из 98 городов, потом – в один из 97 оставшихся, и так далее, итого получаем $98\cdot 97\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = 98!$ маршрутов.

Тогда суммарная стоимость всех маршрутов равна числу рейсов, умноженному на 98!, то есть равна $98!\cdot 99\cdot 100$ эре. Средняя стоимость маршрута равна суммарной стоимости, делённой на число маршрутов: $98!\cdot 99\cdot 100/99!$, а это как раз 100 эре! Значит, найдётся маршрут не дороже 100 эре (ведь если бы все маршруты были дороже 100 эре, то и средняя их стоимость была бы дороже 100 эре).

Замечание. Условие о равенстве стоимости рейсов туда и обратно – лишнее.

Избранные задачи сложного варианта

1. а) Например, подойдёт «буква Г» из четырёх клеток (см. рисунок справа):



б) **Ответ:** при любых.

Рассмотрим такую «букву Г» из n клеток, что из двух её копий складывается прямоугольник $2\times n$. Из таких прямоугольников можно сложить квадрат $2n\times 2n$, а из этих квадратов – «букву Г», подобную исходной с коэффициентом $2n$.

2. а) **Ответ:** необязательно.

Удалим числа 1, 2, ..., 9. Тогда сумма даже наименьших девяти из оставшихся чисел больше 100 (она равна $10+11+\ldots+18=126$).

б) **Ответ:** обязательно.

Рассмотрим 12 пар чисел, дающих в сумме 25: (1, 24), (2, 23), ..., (12, 13). После удаления 8 чисел останется не меньше четырёх нетронутых пар. Они и дадут в сумме 100.

3. Ответ: Вася.

Заметим, что перед Васиным ходом всегда будет оставаться *нечётное* число спичек.

Тогда, пока перед ходом Васи есть хотя бы два квадратика без общих сторон, он всегда сможет найти спичку, не входящую в эти два квадратика, и взять её. Действуя так, Вася всегда будет оставлять после себя хотя бы два квадратика без общих сторон.

Пусть впервые наступил момент, когда перед ходом Васи нет двух квадратиков без общих сторон. Но они были после его прошлого хода, и значит, Петя только что испортил один этих квадратиков. Поэтому остался либо всего один квадратик, либо несколько квадратиков, которые все друг с другом смежны.

В первом случае Вася разрушает оставшийся квадратик и выигрывает.

Во втором случае могли остаться только два квадратика, и они соседние (если квадратиков хотя бы три, то среди них найдутся два без общих сторон). Тогда Вася берет спичку, разделяющую эти соседние квадратики, и выигрывает.

4. Ответ: возможно.

а) $(1{,}5\pm 0{,}5)\cdot(1{,}5\pm 0{,}5)$.

б) Одно значение можно получить и без операций. Для добавления значения a к набору значений, получаемых выражением T, подойдёт выражение $a+(0{,}5\pm\pm 0{,}5)\cdot(T-a)$. Так, постепенно добавляя по новому значению, можно получить любой набор значений.