Вот тебе и раз!

Игорь Акулич

...за ним судья с растопыренными руками, присевший почти до земли и сделавший движенье губами, как бы хотел посвистать или произнесть: «Вот тебе, бабушка, и Юрьев день!»

Н. В. Гоголь. «Ревизор».

Учась ещё в шестом или седьмом классе, я случайно познакомился с теоремой, которая формулировалась очень просто: *сумма двух взаимно обратных положительных чисел не меньше* 2 (причём равенство достигается, только если одно из слагаемых равно 1; тогда и второе равно 1). В виде формулы она записывается так:

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2.$$

Согласитесь – красиво!

Удалось мне ознакомиться и с двумя доказательствами.

Первое было таково. Пусть x – некоторое положительное число. Стартуем от очевидного неравенства:

$$(x-1)^2\geqslant 0$$

(причём равенство будет только при $x=1$, а при других x – строгое неравенство!). Раскроем скобки:

$$x^2-2x+1\geqslant 0.$$

Перенесём $2x$ в правую часть с обратным знаком:

$$x^2+1\geqslant 2x.$$

Наконец, поделим обе части на *положительное* число x (при этом знак неравенства не меняется!) и получим:

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2,$$

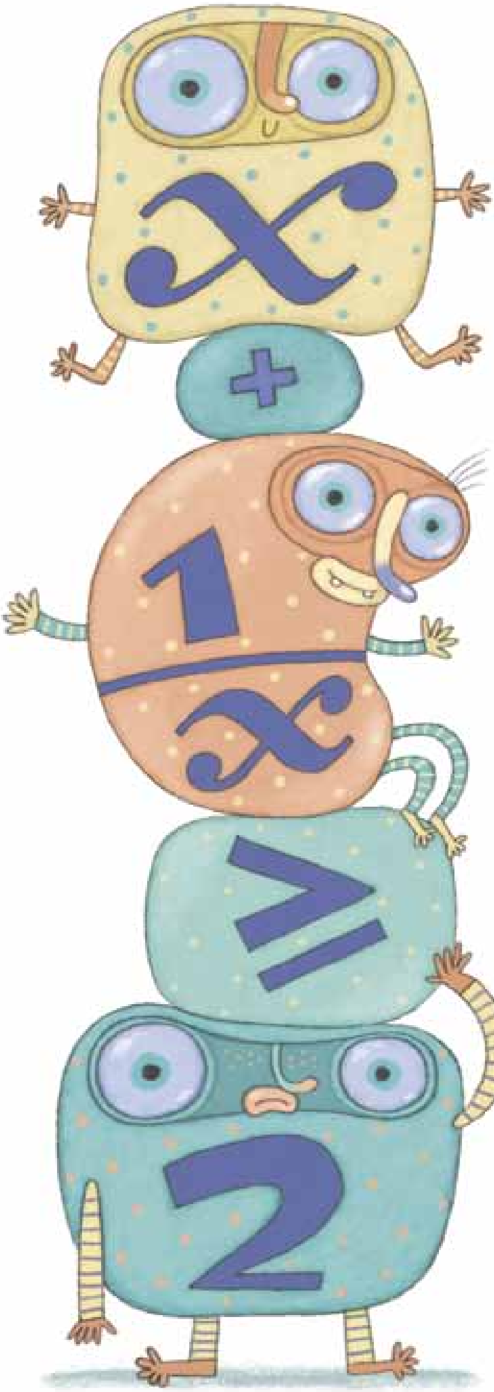
что и требовалось доказать.

Другое доказательство покороче. Преобразуем сумму двух взаимно обратных положительных чисел следующим образом:

$$x+\frac{1}{x}=2+\left(x-2+\frac{1}{x}\right).$$

А теперь заметим, что выражение в скобках равно $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$, то есть заведомо неотрицательному числу (причём оно равно нулю только при $x=1$). Поэтому сумма $x+\frac{1}{x}$ *не меньше* 2, что и требовалось доказать.

Что ж, доказательства вполне понятные и достаточно компактные, но, если вдуматься, представляют собой, по сути, *подгонку* под заранее известный ответ.



И просто так, «с нуля», до них не додумаешься. Поэтому знание такой эффектной теоремы позволяло мне смотреть на соучеников несколько свысока (мысленно, конечно): дескать, я-то *такое* знаю, чего вам самим ни за что не постигнуть!

И вот однажды, чтобы лишний раз утвердиться в своём превосходстве, я предложил однокласснику задачу, найденную в какой-то книге и основанную именно на доказанном неравенстве:

У продавца имеются неравноплечие весы и килограммовая гиря. Покупатель попросил взвесить ему 2 килограмма сахара. Продавец на это сказал:

– Так как весы неравноплечие, я сначала поставлю гирю на одну чашку весов, а на вторую буду досыпать сахар, пока не наступит равновесие. Потом поставлю гирю на вторую чашку весов, а на первой уравновешу её сахаром. В одном случае получится недовес, в другом – перевес (или наоборот), а в сумме должны получиться те самые 2 килограмма.

Спрашивается: действительно ли при таком способе покупатель получит ровно 2 килограмма? А может быть, меньше? А может, больше? Собственным весом чашек и рычагов пренебречь.

«Ну, сейчас ты осрамишься!» – предвкушая удовольствие, думал я, поскольку знал, что неравенство, связанное с суммой двух взаимно обратных чисел, однокласснику незнакомо. А ведь задача, как легко видеть, именно об этом! В самом деле, если одно плечо весов в x раз длиннее другого, то при установке гири на чашку, расположенную на длинном плече, она будет уравновешена x килограммами сахара, а при другом, «обратном» взвешивании – $\frac{1}{x}$ килограммами. Итого покупателю достанется $x+\frac{1}{x}$ килограммов, что, конечно (уж я-то знаю!), больше 2 при любом x.

Тем временем мой одноклассник, не подозревая о своей незавидной участи, начал монотонно и уныло рассуждать:

– Пусть одно плечо весов равно L, а второе на a больше, то есть равно $L+a$. Тогда если гирю положить на чашку у короткого плеча, то по правилу рычага на второй чашке будет при равновесии находиться $\frac{L}{L+a}$ килограммов сахара. А если гирю положить на чашку у длинного плеча, то сахара получится $\frac{L+a}{L}$ килограммов. Итого в сумме получаем...

«Ишь, наворотил! – внутренне злорадствовал я. – Вот уж закопаешься!». Он же продолжал:

– ...в сумме получаем $\frac{L}{L+a}+\frac{L+a}{L}$. Что здесь делать? Наверно, придётся приводить к общему знаменателю:

$$\frac{L}{L+a}+\frac{L+a}{L}=\frac{L^2+(L+a)^2}{(L+a)L}=\frac{L^2+L^2+2aL+a^2}{L^2+aL}=\frac{2(L^2+aL)+a^2}{L^2+aL}=$$
$$=2+\frac{a^2}{L^2+aL}.$$

Это выражение явно больше 2. Оно может равняться 2, только если $a=0$, но такого не будет, потому что весы неравноплечие. Значит, покупатель получит *больше* двух килограммов сахара. Всё!

В ответ я смог только открыть рот и вытаращить глаза. Ещё бы, потерпеть такое фиаско! Ведь фактически, вопреки моим надеждам, он не только доказал неравенство с суммой взаимно обратных чисел, но и сделал это «в лоб», напрямую, заранее не зная ответа. А я, как ни крути, с треском провалился.

Долго меня грызла досада, но постепенно всё-таки перестала. Потому что в настоящее время этот бывший одноклассник – крупный учёный, специалист в области физики элементарных частиц и астрофизики, член-корреспондент РАН Игорь Иванович Ткачёв. Такому и проиграть не зазорно!

А может, читатель предложит своё доказательство неравенства, не похожее ни на что изложенное? Так сказать, *принципиально* иное? Попробуйте! И сообщите.

Художник Елена Цветаева