XXXVII ТУРНИР ГОРОДОВ
ВЕСЕННИЙ ТУР

28 февраля и 13 марта 2016 года состоялся весенний тур XXXVII Турнира Городов – международного математического соревнования для школьников. Приводим все задачи базового варианта и избранные задачи сложного варианта для 8 – 9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов.

Базовый вариант, 8 – 9 классы

1 (3 балла). По кругу стоят мальчики и девочки (есть и те, и другие), всего 20 детей. Известно, что у каждого мальчика сосед по часовой стрелке – ребёнок в синей футболке, а у каждой девочки сосед против часовой стрелки – ребёнок в красной футболке. Можно ли однозначно установить, сколько в круге мальчиков?

Егор Бакаев

2 (4 балла). В остроугольном треугольнике ABC угол C равен $60°$. Пусть H – точка пересечения высот этого треугольника. Окружность с центром H и радиусом HC второй раз пересекает прямые CA и CB в точках M и N соответственно. Докажите, что AN и BM параллельны (или совпадают).

Егор Бакаев

3 (5 баллов). Существуют ли 2016 целых чисел, сумма и произведение которых равны 2016?

Михаил Евдокимов

4 (5 баллов). В квадрате 10×10 все клетки левого верхнего квадрата 5×5 закрашены чёрным цветом, а остальные клетки – белым. На какое наибольшее количество многоугольников можно разрезать (по границам клеток) этот квадрат так, чтобы в каждом многоугольнике чёрных клеток было в три раза меньше, чем белых? (Многоугольники не обязаны быть равными или даже равновеликими.)

Егор Бакаев

5 (5 баллов). На листе бумаги синим карандашом нарисовали треугольник, а затем провели в нём красным карандашом медиану, биссектрису и высоту (возможно, не все из разных вершин), лежащие внутри треугольника. Получили разбиение треугольника на части. Мог ли среди этих частей оказаться равносторонний треугольник с красными сторонами?

Михаил Евдокимов

Избранные задачи сложного варианта, 8 – 9 классы

1 (4 балла). На длинной ленте бумаги выписали все числа от 1 до миллиона включительно (в некотором произвольном порядке). Затем ленту разрезали на кусочки по две цифры в каждом кусочке. Докажите, что в каком бы порядке ни выписывались числа, на кусочках встретятся все двузначные числа.

Алексей Толпыго

2 (6 баллов). Дан квадрат со стороной 10. Разрежьте его на 100 равных четырёхугольников, каждый из которых вписан в окружность диаметра $\sqrt{3}$.

Илья Богданов

3. (8 баллов). Художник-абстракционист взял деревянный куб $5\times5\times5$, разбил каждую грань на единичные квадраты и окрасил каждый из них в один из трёх цветов – чёрный, белый или красный – так, что нет соседних по стороне квадратов одного цвета. Какое наименьшее число чёрных квадратов могло при этом получиться? (Квадраты, имеющие общую сторону, считаются соседними и в случае, если они лежат на одной грани куба, и в случае, если они лежат на разных гранях куба.)

Михаил Евдокимов

4. а) (5 баллов). Есть $2n+1$ батареек ($n>2$). Известно, что хороших среди них на одну больше, чем плохих, но какие именно батарейки хорошие, а какие плохие, неизвестно. В фонарик вставляются две батарейки, при этом он светит, только если обе – хорошие. За какое наименьшее число таких попыток можно гарантированно добиться, чтобы фонарик светил?

б (5 баллов). Та же задача, но батареек $2n$ ($n>2$), причём хороших и плохих поровну.

Александр Шаповалов

Художник Сергей Чуб