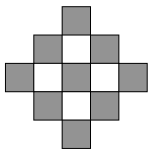
НАШ КОНКУРС («Квантик» № 7)

31. *Двадцать пять ребят пошли в лес и стали ловить кузнечиков. Несколько ребят поймали по одному кузнечику, половина оставшихся ребят поймали по два кузнечика, а остальные не смогли поймать ни одного. Сколько всего кузнечиков поймали ребята?*

Ответ: 25. У ребят, поймавших по одному кузнечику, всего столько кузнечиков, сколько этих ребят. Назовём поймавших два кузнечика ловкими, а не поймавших ни одного – невезучими. Ловких ребят столько же, сколько невезучих, но каждый ловкий поймал по два кузнечика – значит, в сумме у них столько кузнечиков, сколько всего ловких и невезучих. Поэтому общее число пойманных кузнечиков равно общему числу ребят, то есть 25.

32. *а) На рисунке изображена салфетка из 13 клеток. Какое наибольшее количество неперекрывающихся доминошек 1×2 можно уместить на этой салфетке?*



б) А какое наименьшее количество доминошек потребуется, чтобы покрыть салфетку целиком, если доминошки могут перекрываться?

а) **Ответ:** 4. В каждой доминошке одна белая клетка, а всего белых клеток 4. Значит, если доминошки не перекрываются, их число не может быть больше 4. Чтобы уместить 4 доминошки, поместим их в «углы» салфетки.

б) **Ответ:** 9. В каждой доминошке одна чёрная клетка, а всего чёрных клеток 9. Значит, чтобы покрыть всю салфетку, нам потребуется минимум 9 доминошек. Чтобы это сделать, добавим к четырём доминошкам из пункта а) ещё 5, которые закрывают неугловые чёрные клетки.

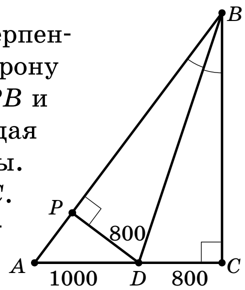
33. *На доске написаны в ряд четыре четвёрки: 4 4 4 4. Между каждыми двумя соседними четвёрками надо поставить один из знаков «+», «−», «×» или «:», затем расставить скобки (если потребуется) и вычислить значение. Получите таким способом каждую из цифр от 0 до 9.*

$4+4-4-4=0$	$(4\times4+4):4=5$
$4-4+4:4=1$	$4+(4+4):4=6$
$4:4+4:4=2$	$4+4-4:4=7$
$(4+4+4):4=3$	$4+4+4-4=8$
$4+(4-4)\times4=4$	$4+4+4:4=9$

34. Р*азрежьте какой-нибудь куб на одинаковые кубики и переложите их так, чтобы получилось 49 кубов, не обязательно одного размера.*

Разрежем куб $6\times6\times6$ на кубики $1\times1\times1$. Нижняя половина куба состоит из четырёх кубов $3\times3\times3$. Лежащий на ней слой высоты 2 можно разбить на 9 кубов $2\times2\times2$. Оставшийся слой высоты 1 состоит и $6\times6=36$ единичных кубиков. Всего получилось $4+9+36=49$ кубов.

35. *Дорожки парка расположены так, как показано на рисунке: угол ACB прямой, дорожка BD делит угол ABC пополам. Точка B – вход в парк, а точка D – ларёк с мороженым. Буратино и Мальвина решили купить мороженое, но пошёл сильный дождь, и дорожку BD размыло (по ней нельзя пройти), а на дорожке BC образовалась огромная лужа. Поэтому Мальвина пошла по сухой дороге через точку A, а Буратино, любящий лужи, побежал по дороге через точку C. На сколько метров путь Буратино короче пути Мальвины, если $AD=1000$ м, а $DC=800$ м?*



Ответ: 800 м. Опустим перпендикуляр из точки D на сторону AB. Тогда треугольники DPB и DCB равны, ведь у них общая гипотенуза и равные углы. Значит, $DP=800$ и $BP=BC$. Из прямоугольного треугольника ADP, по теореме Пифагора, $AP^2=AD^2-DP^2$. Значит, $AP=600$. Мальвина прошла $BA+AD=$ $=BP+AP+AD$, Буратино прошёл $BC+CD$. Так как $BP=BC$, то путь Буратино короче пути Мальвины на $AP+AD-CD=600+1000-800$, то есть на 800 м.

ЗМЕЙКА ИЗ КУБИКОВ («Квантик» № 8)

На рисунке 1 напишем на кубиках их высоту: если кубик стоит на другом сверху, то и число на первом кубике больше числа на втором на 1, а если кубики находятся на одной высоте, то и числа на них одинаковые. Видно, что один конец змейки выше другого на 1. На рисунке 2 напишем числа таким же способом, только число на кубике тем больше, чем правее находится кубик. Один конец змейки правее другого на 2. На рисунке 3 числа написаны так же, только число тем больше, чем дальше от нас находится кубик. Один конец змейки находится на 3 дальше, чем другой. Итак, чтобы попасть из центра кубика на одном конце змейки в центр кубика на другом её конце, нужно сделать 1 шаг вверх, 2 шага влево и 3 шага назад. Чтобы замкнуть змейку, надо попасть из кубика на одном конце в место рядом с кубиком на другом конце, то есть сделать на один шаг меньше. Значит, минимальное число кубиков, которым можно замкнуть змейку, равно $(1+2+3)-1=5$.

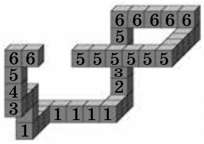


Рис. 1

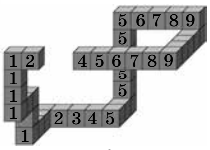


Рис. 2

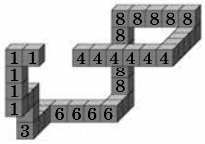


Рис. 3

ПЧЕЛАМПОВАЯ БИТВА

1. *Попугайка* и *колбасанки* немного интереснее, потому что *ногайка* на слух напоминает уже существующее слово *нагайка*, а *колбасардина* – громоздкое. *Головаленок*. *Ведробот*, *топоросёнок*, *пылесоска*, *бородача*.

2. *Угрозаяц*: роза, Оз. *Акулак*: акула, кулак, лак. *Автобусыр*: авто, автобус, бусы, сыр. *Носкитель*: нос, носки, скит, кит, китель, ель.

3. От лихой кареты цоканье копыт – вот и лето. От соли щепотка, яйцо, молоко – вот и омлет.

НАПРАВО ИЛИ НАЛЕВО?

Трамвай едет по рельсам, поэтому повернёт налево (куда поворачивают рельсы).

Танк. Судя по вылетающим брызгам, правая гусеница крутится против движения танка, а левая – по движению. Значит, танк поворачивает направо.

Лодка. Человек, сидящий в лодке, повернул мотор направо. Поэтому мотор толкает корму лодки не прямо по движению лодки, а чуть направо, вокруг носа, заставляя его повернуть налево. Значит, лодка повернёт налево.

Конькобежец, чтобы повернуть, ставит коньки под нужным углом и отталкивается ото льда в сторону поворота. На картинке он наклонён налево. Значит, толкает себя налево и поворачивает налево.

Сноубордист едет своим правым боком вперёд, упираясь в снег задним краем доски, а значит, толкает себя направо.

Когда **машина** куда-то поворачивает, её корпус (да и пассажиров внутри) заносит в противоположную сторону. Почему так происходит? Да просто корпус стремится продолжить своё движение вперёд, вот и отклоняется в сторону, противоположную повороту. Корпус так бы и двигался вперёд, но он прикреплён к колёсной раме пружинами, которые утягивают его обратно, в сторону поворота.

На картинке левый бок корпуса стал ниже правого. Так как корпус прикреплён к раме своим низом, это означает, что корпус отклонился влево. Значит, машина поворачивает направо.

Самолёты поворачивают, накреняясь в направлении поворота, поэтому самолёт на картинке поворачивает направо. Зачем они накреняются? Самолёту нужно не только повернуть себя в пространстве, но и изменить направление своего движения, что при скорости и массе самолёта не так просто, особенно в отсутствие твёрдой опоры. Поэтому нужно ещё прилагать значительную силу в направлении поворота. Эта сила – подъёмная сила, которая действует перпендикулярно поверхности крыла, то есть у накренённого самолёта не только вверх, но и вбок.

Кружка скользит по столу и одновременно вращается против часовой стрелки, если смотреть сверху. Так как кружка тормозится из-за трения о стол, то, чтобы не опрокинуться вперёд, она сильнее упирается в стол своей передней частью. Поэтому спереди сила трения больше.

Сила трения в каждой точке направлена противоположно направлению движения этой точки. Спереди у кружки точки движутся не только вперёд, но и влево – из-за вращения кружки. Получается, что спереди сила трения направлена правее движения кружки. Аналогично, сзади сила трения направлена левее движения кружки, но сзади сила трения меньше.

В целом мы получаем, что трение толкает кружку направо, а значит, кружка будет поворачивать направо.

ПЕРЕГИБАЯ БУМАГУ, ПОЛУЧАЕМ ЗАДАЧУ

5. Ответ: 30°. Пусть $ABCD$ – исходный прямоугольник. После перегибания по диагонали AC получится пятиугольник $ABKD'C$ (рис. 5). Получить шестислойный треугольник можно единственным способом (проверьте) – если перегнуть сначала по MK, а потом по AK.

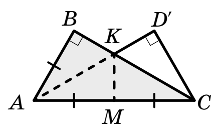


Рис. 5

Так как $AB=AM=CM$, то в прямоугольном треугольнике ABC катет AB равен половине гипотенузы AC, поэтому $\angle ACB=30^\circ$.

6. Ответ: 12. Отметим на рисунке 6 равные отрезки (в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны). Тогда длина большей стороны равна $a+b+4$, а длина меньшей стороны равна $a + b$. Следовательно, $a+b=8$, значит, бóльшая сторона имеет длину $a+b+4=$ $=8+4=12$.

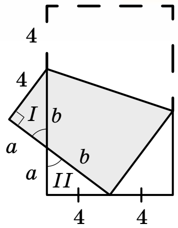


Рис. 6

Отметим, что, используя равенство $a+b=8$ и теорему Пифагора, можно также найти длины остальных сторон треугольников I и II. Получится, что $a=3$, $b=5$, то есть эти треугольники – египетские.

7. Введём обозначения так, как показано на рисунке 7. Заметим, что треугольник $AB'O$ получился перегибанием из треугольника ABO, значит, эти треугольники равны. Следовательно, $\angle AOB=$ $=\angle AOB'$. Кроме того, из параллельности сторон AD и BC прямоугольника следует, что $\angle AOB=$ $=\angle KAO$. Таким образом, в треугольнике AOK углы AOK и KAO равны, значит, этот треугольник равнобедренный: $OK=AK$. Рассуждая аналогично, получим, что треугольник DOL – также равнобедренный. Следовательно, $OK=OL=KL$, то есть треугольник KOL – равносторонний.

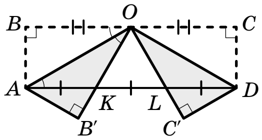


Рис. 7

8. Пусть прямоугольник $ABCD$ перегнули так, что вершина D совпала с вершиной B, тогда эти вершины симметричны относительно линии сгиба KL (рис. 8). Следовательно, KL – серединный перпендикуляр к диагонали BD. Кроме того, $BL=DL$, и так как O – центр симметрии прямоугольника, то $BK=DL$, откуда $BK=BL$ и треугольник BKL – равнобедренный.

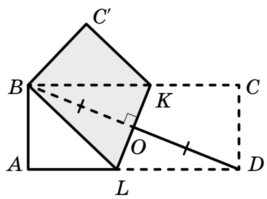


Рис. 8

9. Ответ: 1 : 3. Из условия задачи следует, что равны треугольники $BC'K$ и BCK, значит, $BC'=BC$ (рис. 9). Тогда в прямоугольном треугольнике BAC' катет AC' равен половине гипотенузы BC', поэтому $\angle ABC'=30°$. Следовательно, $\angle AC'B=60°$, тогда $\angle KC'D=30°$.

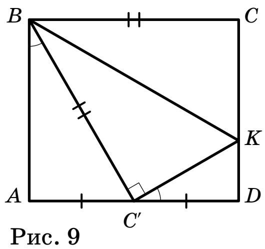


Рис. 9

Из треугольника $KC'D$: $DK=\frac{1}{2}KC'=\frac{1}{2}KC$. Значит, $DK:AB=DK:CD=1:3$.

10. Ответ: 75°. Разогнём бумагу и отметим равные углы, которые были совмещены при сгибании квадрата $ABCD$ (рис. 10). Угол MAN составляет половину прямого угла BAD, значит, $\angle MAN=45°$. Три равных угла с вершиной M вместе образуют развёрнутый угол, поэтому $\angle AMN=60°$. По теореме осумме углов треугольника находим, что $\angle ANM=75°$.

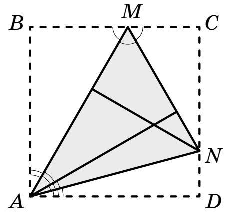


Рис. 10

Отметим, что эта геометрическая конструкция была подробно рассмотрена в статье «Угол в квадрате» (см. «Квантик» №6 за 2015 год).

11. Введём обозначения так, как показано на рисунке 11. Исходный треугольник – равносторонний, поэтому $\angle MCK=\angle A=\angle B=60°$. Угол ACB – развернутый, значит, $\angle 1+\angle 2=120°$ (*).

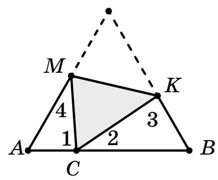


Рис. 11

Из треугольника KBC по теореме о сумме углов треугольника, получим: $\angle 2+\angle 3=120°$ (**). Из равенств (*) и (**) следует, что $\angle 1=\angle 3$. Равенство углов 2 и 4 можно либо доказать аналогично, рассмотрев сумму углов в треугольнике MAC, либо воспользоваться тем, что в треугольниках MAC и KBC соответственно равны две пары углов, поэтому равны и третьи углы.

Отметим, что вопрос задачи можно было сформулировать по-другому: «Докажите, что белые треугольники подобны».

12. Пусть вырезан жёлтый равнобедренный треугольник ABC, который Саша перегнул по биссектрисе AD (рис. 12). По условию, белый треугольник ADE и жёлтый треугольник BED – равнобедренные. Докажем, что основанием первого из них является DE, а второго – BD.

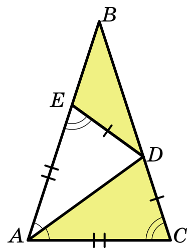


Рис. 12

Действительно, в треугольнике ADC угол C больше угла A, значит $AD>CD$. Так как $CD=$ $=ED$, то $AD>ED$. Кроме того, $AE\neq ED$ (иначе, $AEDC$ – ромб, что невозможно, так как AE и CD не параллельны). Следовательно, $AD=AE$. Так как угол AED равен углу ACD, то этот угол – острый, значит, угол BED – тупой, поэтому BE и ED – равные боковые стороны треугольника BED.

Докажем теперь, что треугольник ABD – равнобедренный. Пусть $\angle EAD=\angle CAD=a$, тогда $\angle DEA = \angle DCA = 2a$. Так как DEA – внешний угол при вершине равнобедренного треугольника BED, то $\angle DBE = \angle BDE = a$. Таким образом, в треугольнике ABD равны углы A и B, поэтому он – равнобедренный: $BD = AD$.

Отметим, что теперь несложно вычислить углы исходного треугольника. Действительно, так как $\angle BAC = \angle BCA = 2a$, $\angle ABC = a$, *то* $2a + a + 2a = 180°$; $a = 36°$. *Следовательно, в исходном равнобедренном треугольнике угол при вершине равен* 36°, *а углы при основании – по* 72°. *Такой треугольник замечателен ещё и тем, что основание D его биссектрисы делит боковую сторону BC в отношении, которое называется «золотым сечением». Действительно, у треугольников ABC и CAD равны соответствующие углы, поэтому эти треугольники подобны. Значит, учитывая, что* $AC = AD = BD$, *получим:* $DC : BD = BD : BC$.

13. Ответ: 2 и 3. Пусть в треугольнике ABC: $AB = 5$, $AC = 4$, $BC = 6$, вершина C при перегибании попала в точку C_1, A_1B_1 – линия сгиба (рис. 13). Из равенства углов AB_1A_1 и BA_1B_1 следует равенство углов CB_1A_1 и CA_1B_1, поэтому треугольник A_1CB_1 – равнобедренный. Так как при перегибании точка C попала в точку C_1, то $CC_1 \perp A_1B_1$, тогда CC_1 – биссектриса угла ACB. По свойству биссектрисы треугольника, $AC_1 : C_1B = AC : CB$. Учитывая, что $AC_1 + BC_1 = 5$, получим: $AC_1 = 2$, $BC_1 = 3$.

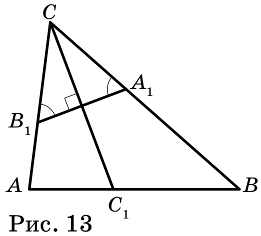


Рис. 13

14. Пусть $ABCD$ – полученный прямоугольник; O – его центр; K и M – середины его коротких сторон AB и CD; L и N – точки пересечения окружности с диаметром KM со сторонами BC и AD соответственно (рис. 14). Тогда прямоугольник $KLMN$ – искомый.

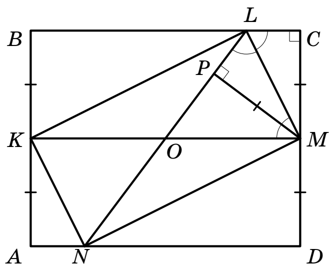
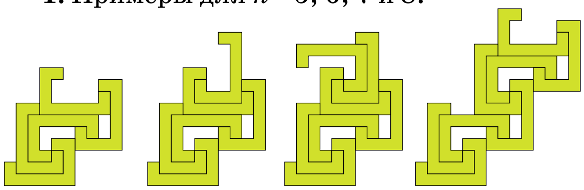


Рис. 14

Действительно, пусть P – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на LN. Так как $\angle CLM = \angle OML$ из параллельности прямых CB и KM и $\angle OML = \angle MLO$, так как $OL = OM = KM/2$, то треугольники MCL и MPL равны, значит, при перегибании по прямой ML они совместятся. Аналогично при перегибании по прямой MN совместятся треугольники MDN и MPN. Наконец, поскольку конструкция симметрична относительно точки O, при перегибании по прямым KL и KN треугольники BKL и AKN наложатся на треугольник NKL. Убедитесь самостоятельно, что прямоугольник $ABCD$ мог получиться только из построенного прямоугольника $KLMN$ и симметричного ему относительно прямой KM.

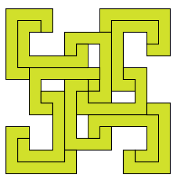
МЕАНДР : НОВАЯ ГОЛОВОЛОМКА НА АНТИЧНУЮ ТЕМУ

1. Примеры для $n = 5$, 6, 7 и 8.

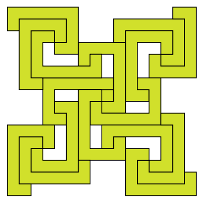


Получить антислайд без границ для любого $n > 4$ можно из примера для $n = 7$. Можно увеличивать число элементов на 3, добавляя красную группу элементов, как на картинке. Причём это можно сделать сколь угодно много раз. Также можно убрать синий элемент или одновременно синий и зелёный. Получите таким образом примеры для $n = 5,6$ и 8.

2.

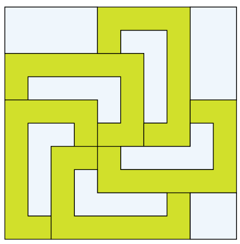


$n = 12$



$n = 16$

3.



8 пустых областей

4.