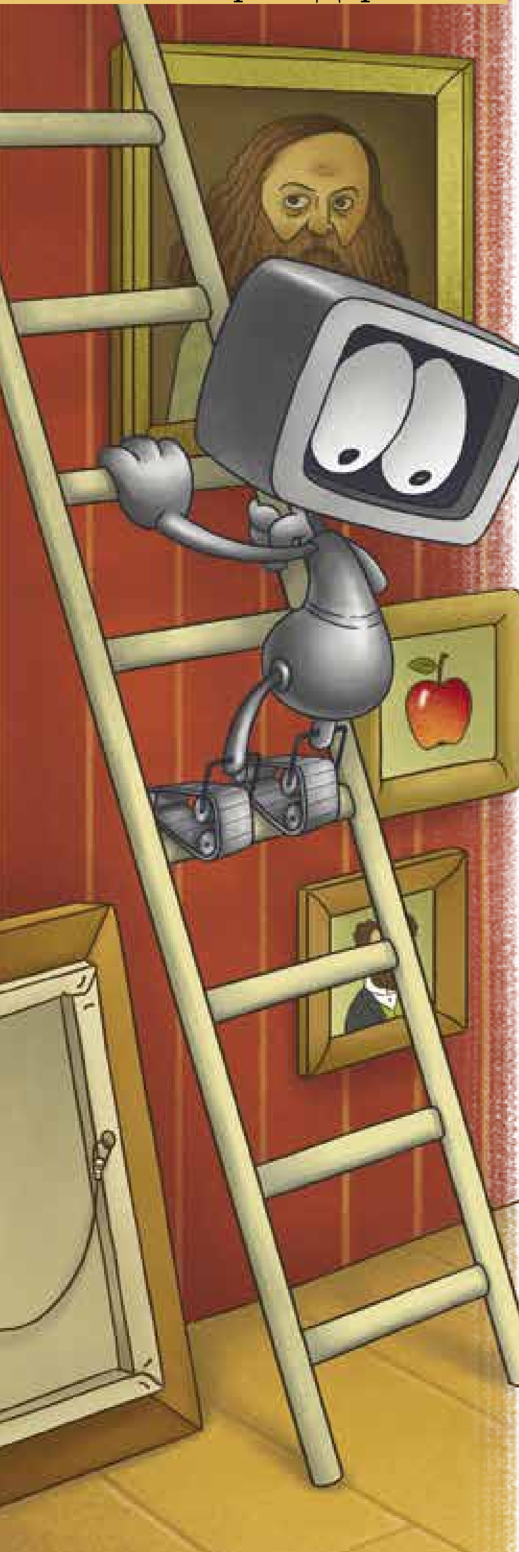
Сергей Дориченко



ТЕОРЕМА КОПЕРНИКА, или РОБОТ-ПЫЛЕСОС

В «Квантике» № 5/2016 была опубликована задача:

Робот-пылесос, имеющий форму круга, проехал по плоскому полу. Для каждой точки граничной окружности робота можно указать прямую, на которой эта точка оставалась в течение всего времени движения. Обязательно ли и центр робота оставался на некоторой прямой в течение всего времени движения?

Удивительно, но ответ отрицателен – центр мог двигаться не по прямой! Мы дадим несколько решений, начнём издалека, зато узнаем по дороге много интересного. Решение в движении смотрите в мультфильме «Котёнок на лестнице» (адрес в интернете: http://www.mccme.ru/~merzon/mirror/mp-cat/).

КВАНТИК НА ЛЕСТНИЦЕ

Пусть к стене вертикально приставлена лестница, на середине которой неподвижно сидит Квантик (вид сбоку показан на рисунке 1). Лестница съезжает – нижний конец движется по полу вправо, а верхний движется по стене вниз (рис. 2), – пока не ляжет на пол (рис. 3). По какой линии движется Квантик?

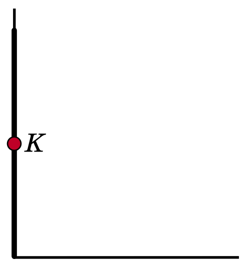


Рис. 1

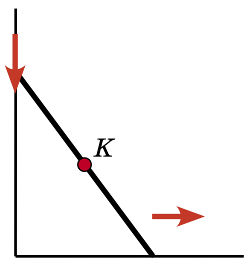


Рис. 2

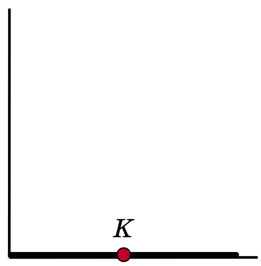


Рис. 3

Пусть O – точка под лестницей, в которой стыкуются стена и пол. Заметим, что и в начале, и в конце пути Квантик находится от точки O на одном и том же расстоянии, равном половине длины лестницы.

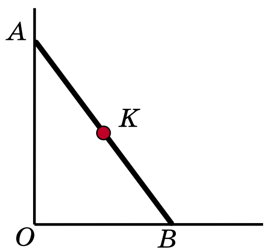


Рис. 4

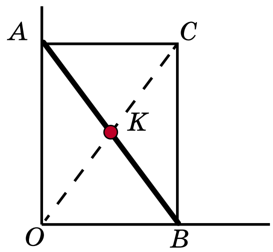


Рис. 5

А что будет в любом промежуточном положении (рис. 4)? Достроим треугольник *AOB* до прямоугольника *OACB*. Квантик находится в точке пересечения диагоналей этого прямоугольника (рис. 5). Так как диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам, *OK* – это половина *AB*. Получается, что расстояние от Квантика до точки *O* всегда одно и то же.

Значит, Квантик всё время находится на окружности с центром в точке *O* и радиусом длиной в половину лестницы, более точно – на четверти этой окружности (синяя линия на рисунке 6).

В каждой ли точке этой линии Квантик побывает? Очевидно, что да: Квантик движется «непрерывно» и не может «пропустить» какую-то точку синей дуги. Можно даже для каждой точки *K* на дуге нарисовать соответствующее положение лестницы: продлеваем *OK* до *OC* (удваивая) и достраиваем до прямоугольника.

Итак, путь Квантика – четверть окружности (рис. 6).

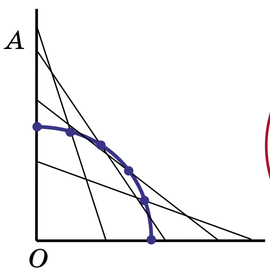


Рис. 6

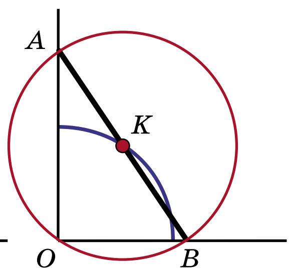


Рис. 7

Но при чём здесь задача о круглом пылесосе? Прикрепим к лестнице пылесос, ограниченный красной окружностью (рис. 7) так, чтобы лестница была диаметром этой окружности (Квантик тогда сидит в её центре). Вместе со съезжающей лестницей-диаметром будет двигаться и окружность. При этом две точки окружности – концы лестницы, – будут перемещаться по прямым (стене и полу), а центр окружности (Квантик) – не по прямой, а по дуге!

ОДНА ОКРУЖНОСТЬ КАТИТСЯ ПО ДРУГОЙ

Оказывается, и остальные точки красной окружности будут двигаться по прямым. Чтобы доказать это, нам понадобится ещё одна окружность – с центром в точке *O* и радиусом, равным длине лестницы (она отмечена зелёным на рисунке 8). Сейчас мы докажем, что красная окружность будет просто катиться по

зелёной (без проскальзывания). Рассмотрим, например, положение красной окружности, изображённое на рисунке 9: лестница NO переехала в положение AB, Квантик сидит в точке K (заметьте, что красная окружность всегда проходит через O). Удвоим отрезок OK, продлив его до OC. Точка C окажется одновременно и на красной, и на зелёной окружностях. Отметим середину L дуги AC (рис. 10). Ясно, что углы LKC и NOC равны (так как NO и LK параллельны). Поскольку радиус красной окружности в два раза меньше радиуса зелёной, красная дуга LC в два раза короче зелёной дуги NC (рис. 11). Но тогда вдвое большая, чем LC, красная дуга AC равна зелёной дуге NC.

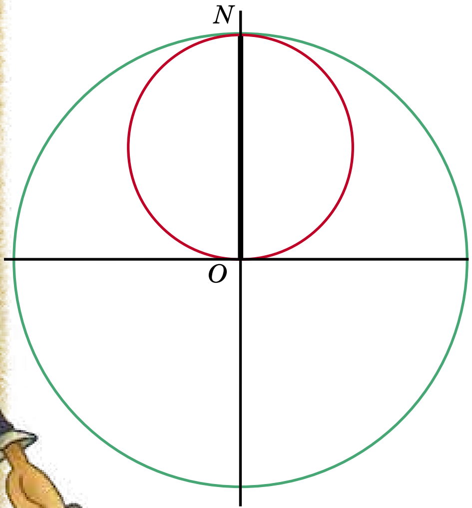


Рис. 8

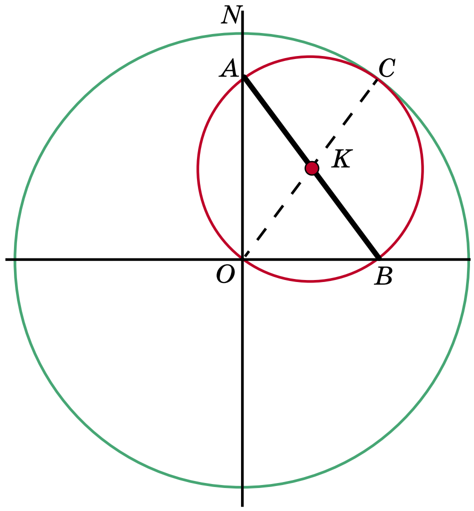


Рис. 9

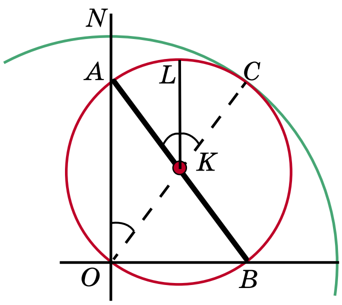


Рис. 10

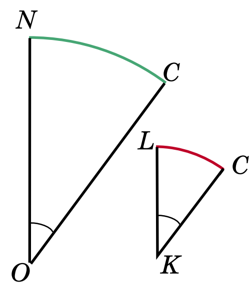


Рис. 11

Это и значит, что красная окружность катится по зелёной, не проскальзывая: зелёное расстояние от точки N до точки касания окружностей всегда равно красному расстоянию от A до точки касания. Но если какая-то точка красной окружности движется по прямой, то и остальные тоже – ведь красная окружность равномерно катится по зелёной, и все точки красной окружности равноправны. Чтобы узнать, по какой именно прямой движется конкретная точка X красной окружности, можно дождаться, когда X попадёт на зелёную окружность, и в этот момент соединить прямой O и X.

Мы доказали **теорему Коперника**: *если окружность катится по внутренней стороне вдвое большей окружности, то каждая точка катящейся окружности всё время остаётся на некоторой прямой.*

ПЫЛЕСОС ЕДЕТ И ВРАЩАЕТСЯ

Приведём более короткое решение исходной задачи – опишем другим способом, как должен двигаться пылесос (ограниченный красной окружностью).

Нарисуем на столе синюю окружность с центром в точке O и такого же радиуса, как у пылесоса. Запустим пылесос так, чтобы его центр K двигался равномерно по синей окружности, а сам пылесос при этом вращался: если центр пылесоса поворачивается вокруг O на некий угол, то сам пылесос поворачивается вокруг своего центра на тот же самый угол в обратную сторону.

При таком движении все точки красной окружности равноправны – достаточно про любую из них доказать, что она движется вдоль некоторой прямой. Пусть пылесос стартовал из положения, показанного на рисунке 12. Докажем, что точка C пылесоса (его верхняя точка в стартовом положении) движется по прямой, проходящей через O.

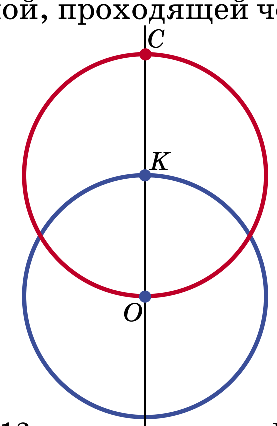


Рис. 12

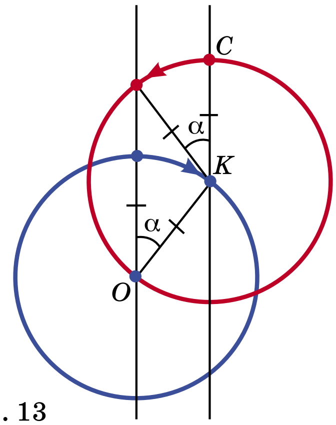
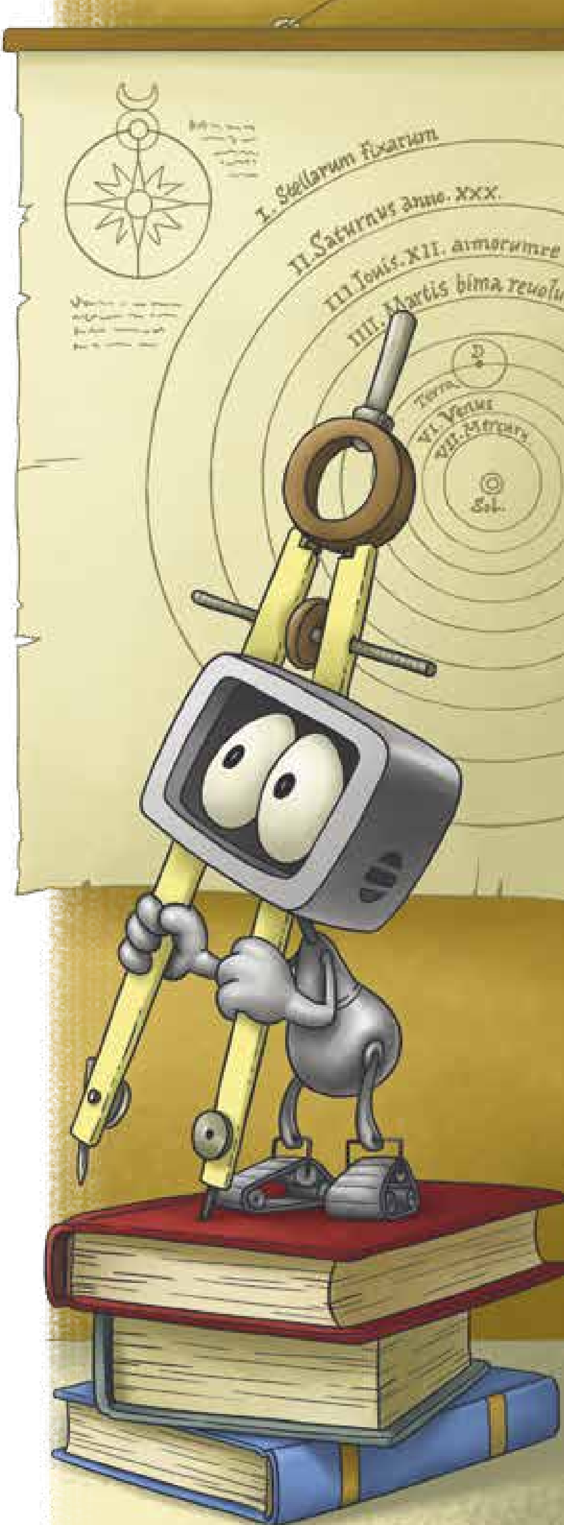
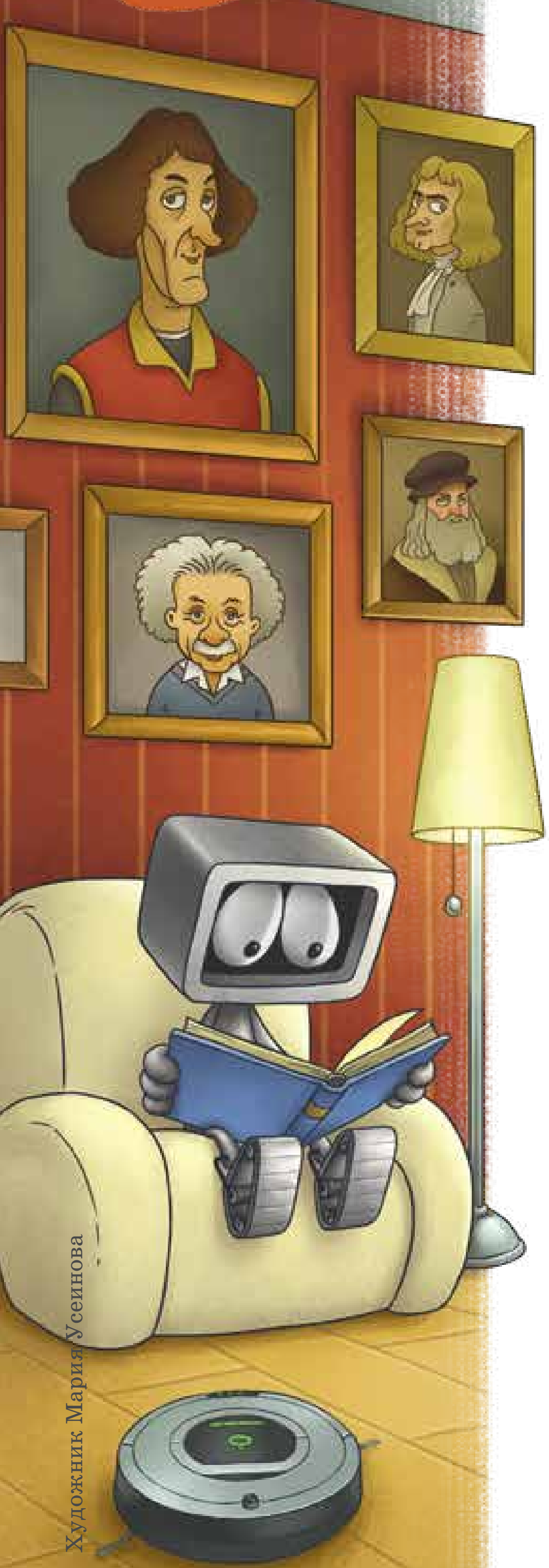


Рис. 13

Пусть центр пылесоса (K) повернулся на угол α вокруг O (по часовой стрелке). Если бы пылесос не вращался вокруг своего центра, точка C по-прежнему





находилась бы над K, то есть на вертикальной прямой, проходящей через K (эта воображаемая ситуация показана на рисунке 13). Но надо ещё повернуть точку C на угол α в обратную сторону. Где окажется C после этого?

Поскольку точка K синей окружности, лежавшая над её центром, повернувшись на угол α по часовой стрелке, переехала с левой вертикальной прямой на правую, то точка C, лежащая над центром точно такой же красной окружности, повернувшись на тот же самый угол α против часовой стрелки, переедет с правой вертикальной прямой на левую! Задача решена.

ИНТЕРЕСНЫЙ ФАКТ

Вернёмся к задаче про Квантика. А что, если он будет сидеть не на середине лестницы, а в какой-то другой её точке (не на концах)? Тогда траектория Квантика будет четвертью эллипса (рис. 14). Много других интересных фактов можно найти в книге Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Прямые и кривые», М.: МЦНМО, 2016, по мотивам введения к которой и написана эта статья.

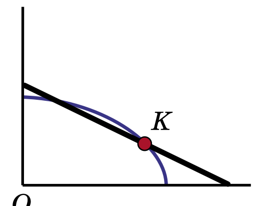


Рис. 14

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

В задачах 1 – 3 красная окружность катится изнутри по зелёной окружности вдвое большего радиуса.

1. Пусть в начальный момент времени наши окружности касались друг друга в точке N красной окружности. Где будет находиться точка N, когда красная окружность «проедет»

а) четверть зелёной окружности; б) две её четверти;

в) три её четверти; г) всю зелёную окружность?

2. Сколько оборотов сделает красная окружность вокруг своего центра, прокатившись один раз по всей зелёной окружности?

3. Пусть в задаче 2 по красной окружности бежит муравей так, что он всё время находится у точки касания окружностей. Сколько раз он обежит красную окружность по периметру?

4. Прикрепим к съезжающей лестнице на рисунке 1 произвольный прямоугольный треугольник так, чтобы лестница была его гипотенузой. Как будет двигаться вершина прямого угла?

5. а) На столе лежит пятак (монета достоинством 5 рублей). Ещё один пятак прокатывается по внешней стороне этого пятака (без проскальзывания). Сколько оборотов он сделает относительно своего центра, вернувшись в исходное положение?

б) Решите ту же задачу, если на столе лежат два пятака, касаясь друг друга, а третий пятак прокатывается по их внешней стороне, касаясь их по очереди.

в) А сколько оборотов сделает пятак, прокатываясь по внешней стороне трёх пятаков, касающихся друг друга?