

26 февраля и 12 марта 2017 года состоялся весенний тур XXXVIII Международного математического Турнира Городов. Приводим задачи базового и сложного вариантов для 8–9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов.

Базовый вариант, 8–9 классы

1 (3 балла). Найдите наименьшее натуральное число, которое начинается (в десятичной записи) на 2016 и делится на 2017.

Михаил Евдокимов

2 (4 балла). Докажите, что на графике любого квадратного трёхчлена со старшим коэффициентом 1, имеющего ровно один корень, найдётся такая точка (p, q) , что трёхчлен $x^2 + px + q$ также имеет ровно один корень.

Борис Френкин

3 (5 баллов). Из вершины A остроугольного треугольника ABC по биссектрисе угла A выпустили бильярдный шарик, который отразился от стороны BC по закону «угол падения равен углу отражения» и дальше катился по прямой, уже ни от чего не отражаясь. Докажите, что если $\angle A = 60^\circ$, то траектория шарика проходит через центр описанной окружности треугольника ABC .

Александр Кузнецов

4 (5 баллов). В ряд стоят 100 детей разного роста. Разрешается выбрать любых 50 детей, стоящих подряд, и переставить их между собой как угодно (остальные остаются на своих местах). Как всего за 6 таких перестановок гарантированно построить всех детей по убыванию роста слева направо?

Илья Богданов

5. а) (2 балла) На каждой стороне 10-угольника (не обязательно выпуклого) как на диаметре построили окружность. Может ли оказаться, что все эти окружности имеют общую точку, не совпадающую ни с одной вершиной 10-угольника?

б) (3 балла) Решите ту же задачу для 11-угольника.

Егор Бакаев





Сложный вариант, 8–9 классы

1 (5 баллов). В шахматном турнире было 10 участников. В каждом туре участники разбивались на пары и в каждой паре играли друг с другом одну игру. В итоге каждый участник сыграл с каждым ровно один раз, причём не меньше чем в половине всех игр участники игры были земляками (из одного города). Докажите, что в каждом туре хоть одна игра была между земляками.

Борис Френкин

2. а) (1 балл) Можно ли нарисовать на клетчатой бумаге многоугольник и поделить его на две равные части разрезом такой формы, как показано на верхнем рисунке?

б) (2 балла) Решите ту же задачу для разреза такой формы, как на среднем рисунке.

в) (4 балла) Решите ту же задачу для разреза такой формы, как на нижнем рисунке.

(Во всех пунктах разрез лежит внутри многоугольника, на границу выходят только концы разреза. Стороны многоугольника и звенья разреза идут по линиям сетки, маленькие звенья в два раза короче больших.)

Юрий Маркелов

3. Взяли несколько положительных чисел и построили по ним такую последовательность: a_1 – сумма исходных чисел, a_2 – сумма квадратов исходных чисел, a_3 – сумма кубов исходных чисел и т.д.

а) (4 балла). Могло ли случиться, что до a_5 последовательность убывает ($a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$), а начиная с a_5 – возрастает ($a_5 < a_6 < a_7 < \dots$)?

б) (4 балла). А могло ли случиться наоборот: до a_5 последовательность возрастает, а начиная с a_5 – убывает?

Алексей Толпыго



4. (8 баллов) В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все стороны равны, а также $AD = BE = CF$. Докажите, что в этот шестиугольник можно вписать окружность.

Б. Обухов

5. (8 баллов) Вес каждой гирьки набора – нецелое число грамм. Ими можно уравновесить любой целый вес от 1 г до 40 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес – на другую). Каково наименьшее число гирь в таком наборе?

Александр Шаповалов

6. (10 баллов) Кузнечик умеет прыгать по полоске из n клеток на 8, 9 и 10 клеток в любую сторону. Будем называть натуральное число n пропрыгиваемым, если кузнечик может, начав с некоторой клетки, обойти всю полоску, побывав на каждой клетке ровно один раз. Найдите хотя бы одно $n > 50$, которое не является пропрыгиваемым.

Егор Бакаев

7. Доминошки 1×2 кладут без наложений на шахматную доску 8×8 . При этом доминошки могут вылезать за границу доски, но центр каждой доминошки должен лежать строго внутри доски (не на границе). Положите таким образом на доску

- а) (6 баллов) хотя бы 40 доминошек;
- б) (3 балла) хотя бы 41 доминошку;
- в) (3 балла) более 41 доминошки.

Михаил Евдокимов

С 26 июня по 2 июля 2017 года на базе отдыха «Берендеевы Поляны» (Костромская область) пройдёт XXIII Турнир математических боев имени А.П.Савина для школьников, закончивших 6–8 классы. Регистрация – до 25 мая 2017 года. Подробности по ссылке www.matznanie.ru/competitions/competitions.html

