ПОПРАВКА

В «Квантике» №2 за 2017 год в решении задачи 20 «Нашего конкурса» были допущены опечатки. Вместо $12x-687$ должно быть $12x-685$, откуда правильный ответ: на 4-м или на 16-м этаже. Приносим свои извинения.

НАШ КОНКУРС («Квантик» № 4, 2017)

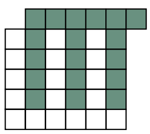
36. *Каждый номер журнала «Квантик» состоит из обложки и восьми двойных листов: они вкладываются друг в друга и соединяются скобами. На каком из восьми листов сумма номеров всех четырёх страниц листа самая большая?*

Ответ: сумма номеров одинаковая на всех листах. Это достаточно проверить для соседних двойных листов. У листа, который ближе к обложке, первые две страницы имеют номера на 2 меньше, а последние две – на 2 больше, чем у второго листа. Тем самым сумма одинаковая.

37. *Ноутик записал на доске три числа: 1/9, 1/10 и 1/11. Квантик за ход называет любое число, а Ноутик увеличивает ровно одно из чисел на доске на число, названное Квантиком. Может ли Квантик делать ходы так, чтобы обязательно в какой-то момент хоть одно из трёх чисел на доске превратилось в 1?*

Ответ: да, может. Приведём дроби к общему знаменателю: 110/990, 99/990, 90/990. Если увеличить одну из дробей на 1/990, то к числителю прибавится 1, а знаменатель не изменится. Значит, Квантик может каждый раз называть 1/990, и тогда, как бы ни действовал Ноутик, наступит момент, когда одна из дробей станет равной $990/990=1$.

38. *Фигуру, изображённую на рисунке, разрежьте по линиям сетки на две одинаковые части, из которых можно сложить квадрат 6×6 (части разрешается переворачивать).*



Ответ см. на рисунке.

39. *В волшебном дворце обитают прекрасные феи. Каждый день у всех фей, кроме одной, улучшается и обаятельность, и привлекательность, а у оставшейся феи – только одно из этих качеств (а другое может и ухудшиться). Однако за последний год все феи совершенно не изменились. Каково наибольшее возможное число фей во дворце? (В году 365 дней.)*

Ответ: 182 феи. Если какое-то качество у феи улучшалось каждый день, то стать прежней она не могла. Значит, для того чтобы фея не изменилась, необходимо, чтобы каждое её качество хотя бы один раз ухудшилось или всё время оставалось прежним. Если фей хотя бы 183, то суммарно у них качеств $183\cdot2=366$ – это больше, чем число дней в году. Но каждый день ухудшается или остаётся прежним только одно качество у одной феи. Значит, такого быть не могло.

Покажем, что фей могло быть 182. Тогда у них 364 качества. Выберем 363 из них и каждое ухудшим один раз за год, ровно на столько, на сколько оно улучшается за все остальные дни. А у оставшегося качества сделаем два ухудшения, опять же ровно на столько, на сколько оно улучшилось за остальные 363 дня. Тогда феи к концу года станут такими же, какими были в его начале.

40. *Из круга можно вырезать четырёхугольник, у которого две противоположные стороны равны a и c, а две другие – b и d. Толик Втулкин утверждает, что тогда из этого круга можно вырезать и четырёхугольник, у которого две противоположные стороны равны a и b, а две другие – c и d. Прав ли Толик? Решите задачу в случаях, когда исходный четырёхугольник*

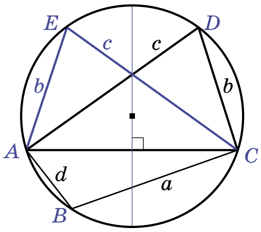
а) вписан в данный круг (вершины четырёхугольника лежат на границе круга);

б) не обязательно вписан, но выпуклый (диагонали лежат внутри четырёхугольника);

в) может быть невыпуклым (одна из диагоналей может лежать снаружи четырёхугольника).

Ответ: а) да; б) да; в) нет.

а) Обозначим вершины четырёхугольника A, B, C, D. Так как AC – хорда окружности, то серединный перпендикуляр к AC делит круг пополам. Построим точку E, симметричную точке D относительно серединного перпендикуляра. В силу симметрии точка E также будет лежать на границе круга, а также $AD=CE$ и $AE=CD$. Тогда четырёхугольник $ABCE$ – искомый: он лежит внутри круга, и длины его сторон такие же, как и у исходного четырёхугольника, однако их порядок изменился. (Фактически мы разрезали четырёхугольник по диагонали AC, перевернули треугольник ADC и снова соединили в четырёхугольник.) Обратите внимание, что мы пользовались только тем, что AC – хорда окружности, поэтому если точки B и D будут лежать внутри круга, то рассуждение останется верным.



б) Мы не приводим строгого доказательства, а изложим лишь идею.

Представим, что исходный четырёхугольник – шарнирный, то есть его можно двигать, а также сгибать во всех вершинах, не меняя длин сторон. Сначала подвинем его так, чтобы какие-то две его вершины попали на границу круга. Если на границу попали противоположные вершины, то дальше задача решается как в пункте а). Если же на границу попали две соседние вершины, то зафиксируем их и будем сгибать четырёхугольник (рис. 1). Так мы можем делать до тех пор, пока либо одна из его вершин не попадёт на границу круга (рис. 2), либо один из углов не станет равным 180° (рис. 3). В первом случае задача решается как в пункте а). Во втором случае четырёхугольник выродился в треугольник. Поменяем местами две стороны, угол между которыми равен 180° (рис. 4), и получим вырожденный четырёхугольник $ABED$, который также лежит внутри круга, но его стороны идут в другом порядке. Теперь немного согнём четырёхугольник $ABED$ в обратном направлении, чтобы он стал невырожденным, и получим искомый четырёхугольник.

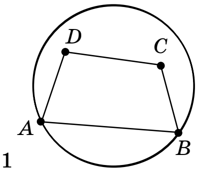


Рис. 1

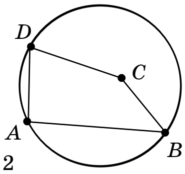


Рис. 2

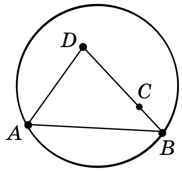


Рис. 3

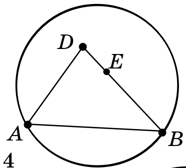


Рис. 4

в) Возьмём четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB=BC=1000$, $CD=DA=1001$, который лежит в круге диаметром 1002 (рис. 5).

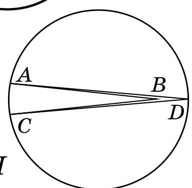
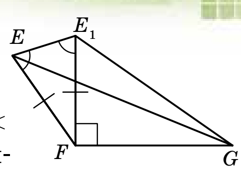


Рис. 5

Возьмём четырёхугольник $EFGH$ со сторонами $EF=GH=1000$, $FG=HE==1001$ и покажем, что он не может лежать внутри круга. Так как противоположные стороны четырёхугольника равны, это параллелограмм. Один из его углов, скажем EFG, неострый, а значит, в треугольнике EFG: $EG^2 \geqslant EF^2+GF^2$ при прямом угле будет равенство, что следует из теоремы Пифагора). Откуда $EG>1400$, что больше диаметра круга, противоречие.

Докажем использованный нами факт: в треугольнике EFG с тупым углом F выполнено $EG^2>EF^2+GF^2$. Из точки F восстановим перпендикуляр FE_1 к FG туда же, где лежит точка E, длины FE. Так как треугольник FEE_1 равнобедренный, то $\angle FEE_1=\angle FE_1E$. Тогда $\angle GEE_1<\angle FEE_1=\angle FE_1E<<\angle GE_1E$. Значит, в треугольнике GEE_1 выполнено $GE>GE_1$ (против большего угла лежит большая сторона). А по теореме Пифагора $GE_1^2=E_1F^2+GF^2=EF^2+GF^2$.



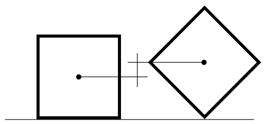
ЗАДАЧИ ПРО КОЛЁСА («Квантик» № 5, 2017)

1. Проехав по одному участку шоссе, любые две встречные машины встретятся, а попутные – только если одна успеет обогнать другую. Например, последняя заехавшая на участок машина вряд ли догонит первую, так как большинство машин имеют примерно равные скорости и потому не обгоняют друг друга. Значит, даже если Катя насчитала больше встречных машин, всего попутных могло быть и больше, просто она их не видела.

2. а) За каждый оборот колеса телега сдвигалась вперед на 4 м (4 стороны квадрата). Значит, за 8 оборотов она проехала $8\times4=32$ м.

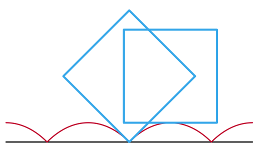
б) Лучше всего, конечно, подошли бы восьмиугольные колёса (при условии, что их форма близка к форме правильного восьмиугольника) – чем ближе форма колеса к кругу, тем лучше.

Чтобы провернуть квадратное колесо с одной стороны квадрата на другую, приходится поднять его центр тяжести на столько, на сколько половина диагонали квадрата длиннее половины его стороны. То есть фактически приходится приподнимать колесо (а вместе с ним и телегу).



в) Форма рельсов выбирается так, чтобы центр тяжести квадрата (то есть просто его центр) находился всё время на одной и той же высоте. Тогда не придётся приподнимать телегу. Кстати, при качении квадрата по таким рельсам его центр в каждый момент находится ровно над точкой, касающейся рельсов – так же, как и у круглого колеса на ровной поверхности (но не так же, как, например, при качении круглого колеса по кривым рельсам).

Поэтому разница высоты между верхней и нижней точками рельса равна разнице между половиной диагонали квадрата и половиной его стороны, то есть $\frac{a}{2}(\sqrt{2}-1)$, где a – сторона квадрата.



3. Это был трактор. Переднее колесо у него в 2 раза меньше и поэтому на одном и том же участке пути оно делает в 2 раза больше оборотов (если на земле лежит нитка, которая на большое колесо намотается за 1 оборот, то на маленькое колесо она намотается за 2 оборота).

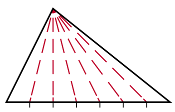
У легковой машины так тоже бывает, когда она на малой скорости делает резкий поворот (например, когда паркуется). Какое-то мгновение задние колёса почти стоят, а передние едут «вбок» почти по кругу.

4. Расстояние между рельсами в Польше (и западнее) меньше, чем в Беларуси и России; поэтому наши колёсные пары для их дорог не годятся, и наоборот.

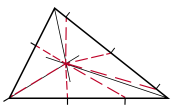
НЕ РОЙ ДРУГОМУ ЯМУ («Квантик» № 5, 2017)

◆ Вова просто переклеил все квадратики так, чтобы каждая грань кубика была одного цвета.

◆ Лиза предложила разметить линейкой одну из сторон на равные части и резать из противолежащего угла через эти метки. Получаются треугольники, у которых одинаковые основания и общая высота. Площади этих треугольников тоже одинаковые.



◆ Во второй раз Лиза посоветовала найти точку пересечения биссектрис углов торта и разделить периметр торта на равные части. Резать торт надо из точки пересечения биссектрис по новым меткам. Каждому достанется один или два треугольника с одинаковыми высотами и равными суммами оснований.



ПОЛЬСКИЕ МОНЕТЫ («Квантик» № 5, 2017)

1. 1 рубль = $6\frac{2}{3}$ злотых. **2.** 100. **3.** 30. **4.** 96.

5. Золото в 15 раз дороже серебра.

6. 22 рубля 75 копеек (точнее, $22\frac{34}{45}$ рубля).

Решения. **1.** 20 злотых = 3 рубля.

2. 2 злотых = 30 копеек, а 20 злотых = 3 рубля.

3. 25 копеек = 50 грошей, а 30 копеек = 2 злотых, откуда 300 грошей = 150 копеек = 10 злотых.

4. 25 копеек = 1 золотник $5\frac{1}{4}$ доли, а 30 копеек = 1 золотник $25\frac{1}{2}$ доли. Отсюда 5 копеек $= 20\frac{1}{4}$ доли, 25 копеек $= 5\cdot 20\frac{1}{4} = 101\frac{1}{4}$ доли, а 1 золотник $= 101\frac{1}{4} - 5\frac{1}{4} = 96$ долей.

5. $\frac{3}{4}$ рубля серебром = 3 золотника и $15\frac{3}{4}$ доли $= 303\frac{3}{4}$ доли, откуда 3 рубля серебром = 1215 долей. А 3 рубля золотом = 81 доля $= \frac{1215}{15}$ доли.

6. Рубль серебром = 405 долей, а фунт $= 96 \times 96 = 9216$ долей.

ДИЛЬЯЖ («Квантик» № 5, 2017)

В прошлом номере в решении задачи про бильяж мы обсудили, что если зеркала скреплены под углом 60°, Квантик увидит своё отражение точно таким же, какое бы оно было в обычном плоском зеркале, плоскость которого перпендикулярна стержню дильяжа. Поэтому если вращать дильяж вокруг стержня, отражение не будет меняться. Если же зеркала стыкуются под углом 90°, отражение получится таким, как будто Квантика повернули на 180° вокруг ребра, по которому стыкуются зеркала. Если вращать дильяж вокруг его стержня, то ребро стыковки будет вращаться, а значит, отражение тоже, причём отражение будет поворачиваться на вдвое больший угол, чем поворачивается дильяж (подумайте, почему).

ПОВОРОТ КВАДРАТА

На некоторых рисунках штриховая линия позволяет увидеть квадрат, помогающий решить задачу.

1.

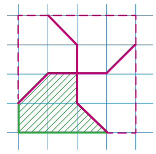


Рис. 1

2.

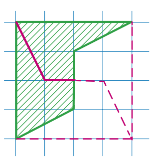


Рис. 2

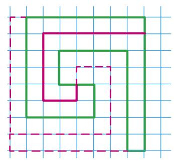


Рис. 3

3.

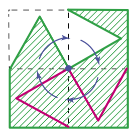


Рис. 4

4. См. рис. 3

5. Существует.

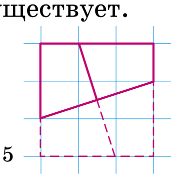


Рис. 5

6. Можно.

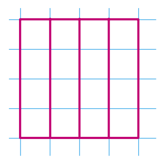


Рис. 6

LXXXIII САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ. ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ II ТУРА.

1. Если бы среди чисел на доске нашлось 4 нечётных числа, их произведение было бы нечётным и не делилось на 30. Значит, на доске выписано не более трёх нечётных чисел. Аналогично на доске выписано не больше трёх чисел, не делящихся на 3, а также не больше трёх чисел, не делящихся на 5.

В предыдущем рассуждении упомянуто не более 9 чисел, выписанных на доске. Следовательно, на доске есть как минимум ещё одно число, и оно должно делиться и на 2, и на 3, и на 5, а значит, и на 30.

2. Маляры перекрашивают клетки «противоположными» способами: если второй маляр пришёл на клетку после первого, то, перекрасив её, он отменил последнее перекрашивание первого маляра.

С учётом этого наблюдения стратегия второго маляра тривиальна: сначала он кратчайшим путём (например, вдоль сторон доски) идёт на стартовую клетку первого маляра. На это ему потребуется 15 ходов – назовём эти ходы стартовыми. За это время соперник тоже сделает 15 ходов, следовательно, в сумме будет «испорчено» не более 30 клеток (то есть не более 30 клеток на доске будут не серыми). После этого второй маляр должен совершать в точности те же ходы, которые делал первый маляр 15 ходов тому назад.

На 16-м ходу первый маляр, возможно, испортит ещё одну, 31-ю клетку, а второй маляр отменит 1-й ход первого маляра, и снова будет испорчено не более 30 клеток. На 17-м ходу второй маляр отменит 2-й ход первого, на 18-м – 3-й, и так далее. Таким образом, в каждый момент времени мы можем считать, что первый маляр совершил только 15 или 16 своих последних ходов, а второй – 15 первых.

В результате таких действий второго маляра в каждый момент на доске будет не более 31 не серой клетки, и значит, не менее $8 \cdot 9 - 31 = 41$ серой клетки.

Осталось заметить, что первый маляр не мог помешать второму совершать ходы. Действительно, представим себе шахматную раскраску доски. Изначально маляры стоят на клетках разного цвета, после хода первого маляра они окажутся на клетках одного цвета, и поэтому в момент хода второго маляра первый находится не на соседней по стороне клетке. После хода второго маляры снова окажутся на клетках разного цвета и ситуация повторится.

3. Ответ: 2017-е число меньше 83-го.

Объединим числа в пары по порядку следования, первое со вторым, 3-е с 4-м и так далее. Изобразим их на числовой прямой.

Мы утверждаем, что все числа, начиная с 3-го, лежат внутри отрезка, образованного первой парой. Действительно, если это неверно, то мы можем взять первое число, не лежащее внутри первой пары чисел. Тогда, когда его выписывал Серёжа, с одной стороны от него было ноль чисел, а с другой – хотя бы два, противоречие.

А раз все числа лежат внутри первой пары, мы можем её стереть, и условие будет выполняться для каждого из последующих чисел.

Рассуждая аналогично, получаем, что все числа, начиная с 5-го, лежат внутри пары из 3-го и 4-го чисел, все числа начиная с 7-го – внутри пары 5-го и 6-го, и так далее. То есть каждое число лежит внутри всех предыдущих пар.

Назовём каждое число левым или правым в зависимости от того, лежит оно слева или справа от парного ему. Тогда каждое число больше всех предыдущих левых чисел и меньше правых.

Поскольку 219-е число больше 84-го, 84-е является левым. А значит, парное ему, 83-е, – правое, и оно больше, чем 2017-е.

4. Достаточно проверить выполнение неравенств треугольника. Пусть F – точка пересечения отрезков BE и CD. Тогда $BE+DC>BF+FC>BC$.

Проверим неравенство $BE + BC > CD$. Для этого прибавим к обеим его частям равные отрезки AE и AD, то есть проверим, что $AE+BE+BC>AD+CD$. Действительно, по неравенству треугольника $AE + BE > AB$ и $BD + BC > CD$; кроме того, $AB=AD+BD$. Значит, $AE+BE+BC>AB+BC=AD+BD+BC>AD+CD$.

Аналогично доказывается третье неравенство треугольника $CD+BC>BE$.

5. Ответ: выигрывает Вася.

Задача содержит секрет: можно считать, что Петя и Вася играют не с клетчатой полоской, а с ожерельем из 99 бусин. Да, они закрашивают бусинки! Более того, будем считать, что ожерелье имеет застёжку. Давайте «уравняем в правах» застёжку и бусинки, а именно, постановим, что застёжка – это тоже бусинка, причём исключительный ход с закрашиванием одной крайней клетки будем интерпретировать как ход, при котором закрашивается соответствующая крайняя бусинка, *а также* застёжка! При таком взгляде правила игры становятся совершенно симметричными и простыми: есть ожерелье из 100 бусин, игроки по очереди закрашивают пары соседних бусин. Каждую бусинку можно закрашивать не более одного раза, проигрывает тот, кто не может сделать ход. В такой игре выигрывает второй игрок: он должен пользоваться симметричной стратегией (каждым ходом закрашивать диаметрально противоположную пару бусин).