№ 6 | июнь 2017

Издаётся Московским центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№6 У ЗЕРКАЛА

ИЮНЬ 2017

ЛЕТАЮЩИЕ СТАКАНЧИКИ

МОЛОЧНЫЙ ПАКЕТ, ИЛИ ПИРАМИДКА ИЗ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Enter

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru

instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12

vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 06, июнь 2017 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор: С.А.Дориченко
Редакция: В.Г.Асташкина, В.А.Дрёмов, Е.А. Котко, И.А.Маховая, А. Ю. Перепечко, М.В.Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas-07
Вёрстка: Р.К.Шагеева, И.Х.Гумерова
Обложка: художник Yustas-07

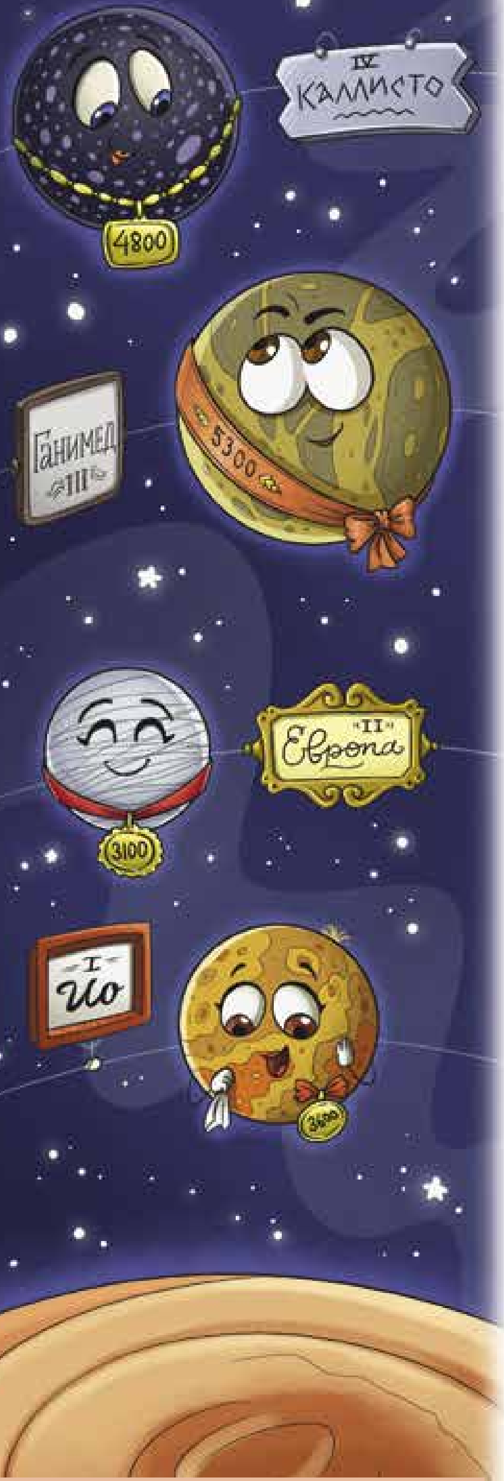
Учредитель и издатель:
Негосударственное образовательное учреждение «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях связи Почты России:
▪ Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)
▪ «Каталог Российской прессы» МАП (индексы **11346** и **11348**)
Онлайн-подписка по «Каталогу Российской прессы» на сайте **vipishi.ru**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 6000 экз.
Подписано в печать: 16.05.2017
Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «ИПК Парето-Принт»,
Адрес типографии: 170546, Тверская обл., Калининский р-н, с/п Бурашевское, ТПЗ Боровлево-1, 3«А»
www.pareto-print.ru
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

СОДЕРЖАНИЕ

Валерия Сирота



ЮПИТЕР

Окончание. Начало в № 5, 2017 г.

ГАЛИЛЕЕВЫ СПУТНИКИ

У Юпитера (радиус планеты 70 тыс. км, период вращения вокруг оси 10 часов) известно 67 спутников, ближайший из них – Метида (радиус орбиты 128 тысяч км, период обращения вокруг Юпитера 7 часов), самый дальний – Мегаклите (радиус орбиты 24,5 миллиона км, период обращения 800 земных дней).

У Юпитера, как и положено главному богу (и самой большой планете), огромная свита – известно уже почти 70 спутников, и продолжают открывать всё новые. Но больших среди них всего четверо – все остальные имеют неправильную форму, и только трое из этих остальных больше 100 км в длину (причём из этих троих два сделаны не из камня, а изо льда!). А бо́льшая часть (штук 50) – и вовсе какие-то булыжники размером от 1 до 5 км. Они к тому же ещё и вращаются вокруг Юпитера «не в ту сторону» (по часовой стрелке, а не против, как почти всё в Солнечной системе). Астрономы подозревают, что это – заблудшие овечки, не всегда они были спутниками, а прихватил их Юпитер откуда-нибудь из пояса астероидов...

Галилеевы спутники Юпитера в сравнении с Луной

Имя	Масса, в массах Луны	Диаметр, в диаметрах Луны	Диаметр, в км	Радиус орбиты в сравнении с лунной	Период обращения вокруг Юпитера, земные сутки
Ио	1,2	1,05	3600	1,1	1,8 = 42 часа
Европа	0,65	0,9	3100	1,75	3,6
Ганимед	2	1,50	5300	2,8 = 1млн км	7,2
Каллисто	1,5	1,40	4800	4,9	16,7

Задача. Ио находится от Юпитера на таком же расстоянии, как Луна от Земли. Почему же она делает один оборот всего за 42 часа, а не за месяц, как Луна?

Четыре больших спутника называются *галилеевыми*. Третий из них – Ганимед – самый большой спутник в Солнечной системе, он больше Меркурия! Хотя по массе он Меркурию в 2 раза проигрывает: как и почти во всех далёких от Солнца спутниках, у Ганимеда внутри много льда, и из-за этого плотность у него маленькая – лёд ведь гораздо легче камня. Так же обстоит дело и с Каллисто, которая занимает третье место

по размеру среди всех спутников; по диаметру она ровно с Меркурий, а по массе – в 3 раза меньше него. У них обоих обнаружена тоненькая атмосфера: у Ганимеда – из кислорода, у Каллисто – из углекислого газа. Вода, кислород… может, там кто-нибудь живёт?

Вращение всех четырёх спутников вокруг оси остановлено приливной силой Юпитера так же, как вращение Луны – Землёй: они повернуты к Юпитеру всегда одной и той же стороной. Но это ещё не всё: у первых троих из них периоды обращения вокруг Юпитера тоже синхронизированы! Пока Ганимед делает один оборот вокруг планеты, Европа делает ровно два, а Ио – ровно четыре! Этот сложный космический танец поддерживает их орбиты чуть-чуть вытянутыми: каждую планету остальные дружно «подталкивают» всегда в одном и том же месте, мешая Юпитеру своей приливной силой превратить все орбиты в идеальные круги.

Но и это ещё не всё. Хоть они и смотрят всегда на Юпитер не отрываясь, ему всё мало: из-за вытянутости орбиты приливная сила в ближней к нему точке стремится ещё сильнее вытянуть спутники вдоль направленной к Юпитеру оси, а в дальней точке – «сплюснуть» их обратно. (Помните воображаемый океан на Луне? Чем ближе спутник к планете, тем выше прилив – форма «океана» в ближней и дальней точках разная. И разница не в метр-два, а целых 100 м!) Так что приливная сила всё время «теребит» спутники, сжимает-растягивает… и этим нагревает их!

Особенно это заметно по Ио. На ней 400 действующих вулканов! Да каких – на Земле таких не увидишь: из одних вытекают языки лавы по 300 км длиной, из других прямо в космос бьют газовые фонтаны высотой 300 км. Из-за соединений серы вся поверхность спутника раскрашена жёлтым, красным, а то и зелёным. Облако вулканических газов тянется вдоль всей орбиты Ио.

Извержение вулкана на Ио; цвета – настоящие

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ


Европа и линии на ней

Мы уже говорили, что вдали от Солнца почти у всех спутников плотности маленькие, потому что в их составе много льда. Но Ио – исключение: у неё самая большая плотность из всех спутников Солнечной системы! Она скорее похожа на планеты земной группы: силикатная (кремниевая) мантия, железное ядро. Воды там меньше, чем где-либо в Солнечной системе! Вероятно, во времена, когда Ио ещё только образовывалась, а Юпитер был ещё молодым и горячим, приливные силы «переплавили» весь материал Ио и вся вода испарилась…

Европа – тоже удивительный спутник. От Юпитера она подальше, и «досталось» ей поэтому меньше. Но и у неё под поверхностью есть слой (видимо, километров 100) подогретой приливными силами жидкости. Только жидкость эта – не раскалённая магма, а солёная вода! Огромный океан глубиной 100 км. Вот где кто-то мог бы жить… Европа, видно, тоже когда-то переплавилась, и часть воды испарилась (плотность у Европы тоже довольно большая!), а остальная часть «всплыла» наружу, образовав этот самый океан, покрытый сверху ледяной корой.

Благодаря ледяной поверхности, Европа – один из самых светлых и уж точно самый гладкий из всех известных объектов Солнечной системы. Ни заметных гор, ни кратеров – только загадочные тёмные линии шириной до 20 км, которыми исчерчена поверхность. Может быть, это трещины, через которые выливается наружу – и потом замерзает – вода из океана…

Ганимед, по-видимому, тоже когда-то полностью переплавился. Предполагают, что у него железное ядро (до сих пор жидкое, ещё не остыло!), вокруг ядра – каменная (силикатная) мантия, а лёгкая вода «всплыла» наверх: на поверхности Ганимеда льда гораздо больше, чем внутри. Возможно, подо льдом тоже есть слой воды, но, по-видимому, тоньше, чем на Европе, и очень глубоко (на глубине около 200 км). Вообще, льда много – примерно половина всей массы.

На Ганимеде кратеров уже довольно много, а на Каллисто – просто очень много. Это значит – поверхность старая, никаких вулканов. Каллисто не попадает в резонанс с другими спутниками, и от Юпитера она чуть дальше. Поэтому здесь не было приливного разогрева, не было «переплавки», и лёд остался вмороженным в камни – как на поверхности, так и внутри.

Когда что-нибудь врезается в спутник, в месте удара лёд расплавляется и разравнивает центр кратера. Поэтому многие кратеры, особенно свежие, выглядят светлыми пятнами. А у других кратеров блестят покрытые инеем выступающие края.

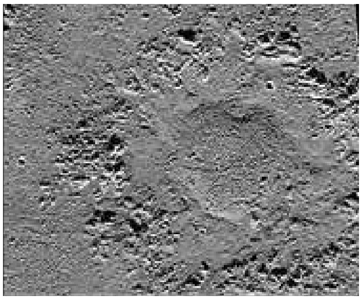
Наглядевшись на эти ледяные чудеса, мы покидаем окрестности Юпитера и направляемся к Сатурну. По дороге предлагаем вам подумать над такими вопросами:

Почему это Земля и все внутренние планеты состоят в основном из атомов железа, кремния, кислорода, а планеты-гиганты – из водорода с небольшой примесью гелия?

И почему в крупных спутниках планет-гигантов (скоро увидим, что и Сатурна тоже) много льда, а в Луне и планетах земной группы льда и воды почти нет?

Ганимед

Каллисто



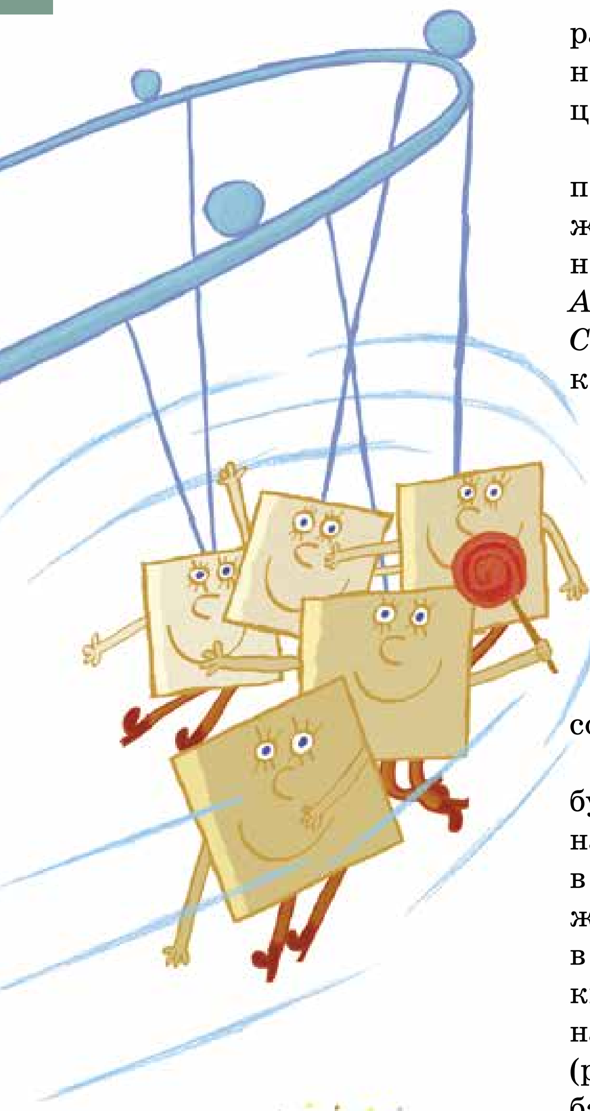
Один из кратеров на Каллисто

Фотографии сделаны космической станцией «Галилео»

Художник Мария Усеинова

Егор Бакаев

Поворот квадрата



В прошлом номере мы разрезали квадрат на две равные части. Придумать разные способы это сделать нам помогла симметричность квадрата относительно центра.

У квадрата есть другое похожее свойство: если его повернуть вокруг центра на 90°, то он будет расположен точно так же, как сначала. Если назвать вершины, как на рисунке, то при таком повороте вершина A перейдёт в вершину B, вершина B – в вершину C, C – в D, а D – в A. Говорят, что при таком повороте квадрат переходит в себя (рис. 1).

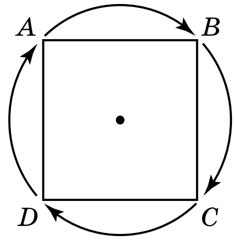


Рис.1

Это свойство поможет нам придумать разные способы разрезать квадрат на 4 равные части.

Проведём от центра к границе квадрата какую-нибудь линию. Представим, что мы провели её краской на квадрате, вырезанном из картона (рис. 2). Нарисуем в тетради квадрат такого же размера. Когда мы приложим картонный квадрат к квадрату, нарисованному в тетради, линия отпечатается (рис. 3). Если совместить квадраты по-другому (повернув картонный квадрат на 90°), линия снова отпечатается, но в другом месте (рис. 4). Прикладывая квадрат всеми четырьмя способами, мы получим на листе четыре одинаковые линии (рис. 5, справа).

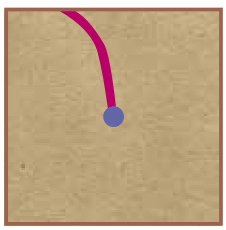


Рис. 2

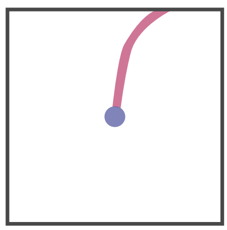


Рис. 3

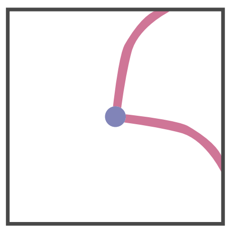


Рис. 4

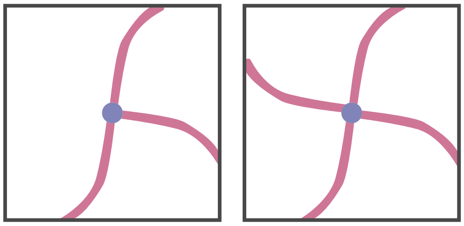


Рис. 5

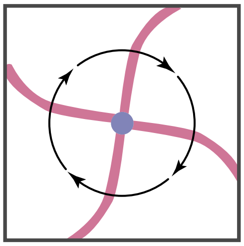


Рис. 6

Эти линии делят квадрат на четыре части. При повороте квадрата на 90° вокруг центра он переходит в себя. А каждая линия переходит в соседнюю линию. Значит, и каждая из частей, ограниченных этими линиями, переходит в соседнюю (рис. 6). Поэтому эти части равны!

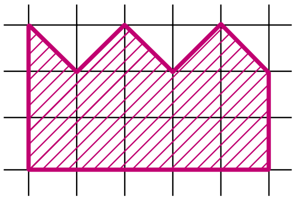


Рис. 7

Покажем теперь, как с помощью поворота квадрата можно решить задачу, предлагавшуюся в сентябре 2016 года на Турнире Ломоносова. Нужно было разрезать «заборчик», изображённый на рисунке 7, на две равные части.

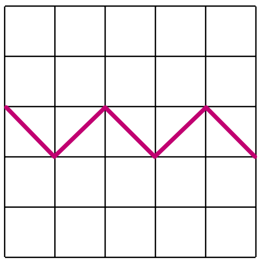


Рис. 8

Заметим, что из двух одинаковых «заборчиков» можно сложить квадрат (рис. 8).

Граница «заборчиков» симметрична относительно центра квадрата. Иными словами, если половинку этой границы повернуть на 180°, она перейдёт в другую половинку (рис. 9). А если эту половинку повернуть на 90°, то четыре получившиеся линии будут разбивать квадрат на четыре равные части (рис. 10). Вот и решение задачи (рис. 11)!

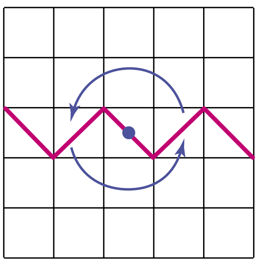


Рис. 9

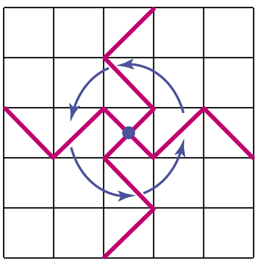


Рис. 10

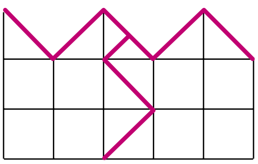


Рис. 11

Художник Инга Коржнева

Следующие задачи попробуйте решить самостоятельно.

1. Сложите квадрат из четырёх таких же фигур, как на рисунке 12.

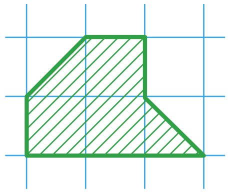


Рис.12

2. Разрежьте каждую из двух фигур на рисунках 13 и 14 на две равные части.

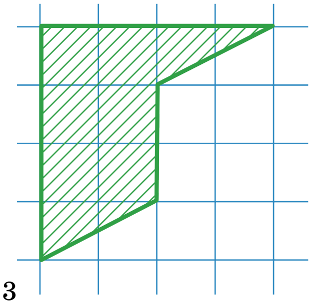


Рис. 13

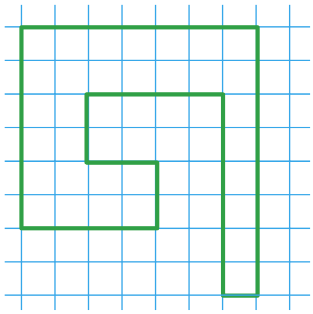


Рис. 14

3. Из трёхклеточного уголка вырезали равносторонний треугольник и приклеили его к другой стороне уголка (рис. 15). Разрежьте получившуюся фигуру на три равные части.

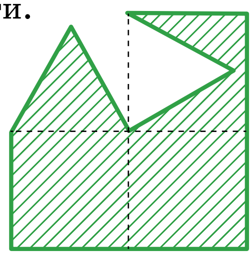


Рис. 15

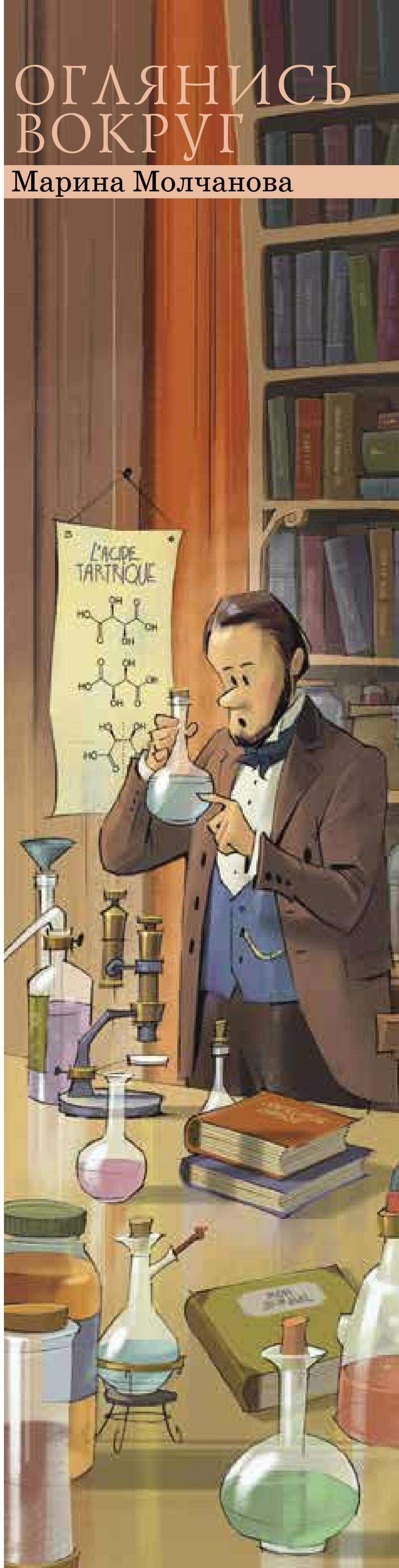
4. Разрежьте шахматную доску на четыре равные части так, чтобы поля a1, b2, c3, d4 были в разных частях.

5 (*Сергей Маркелов*, XXX Турнир городов). Существует ли выпуклый многоугольник, который можно разделить отрезком на две равные части так, что этот отрезок разделит одну из сторон многоугольника пополам, а другую – в отношении 1:2?

6. Можно ли квадрат разрезать на четыре равные части так, чтобы части не переходили друг в друга при повороте квадрата вокруг центра?

Марина Молчанова

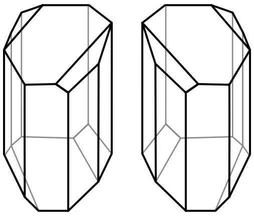
У зеркала



С ЧЕГО ВСЁ НАЧАЛОСЬ

В 1847 году Луи Пастер – будущий знаменитый «охотник за микробами», а тогда просто молодой химик – совершил своё первое удивительное открытие.

Пастер изучал винную кислоту – она содержится во многих природных продуктах. Чуть раньше открыли её необычное свойство – особое взаимодействие со световыми волнами (вращение плоскости поляризации света; правда, чтобы объяснить это, нужна отдельная статья). Пастер решил продолжить исследования. И выяснил, что природная винная кислота обладает этим свойством, а синтезированная в лаборатории – нет!

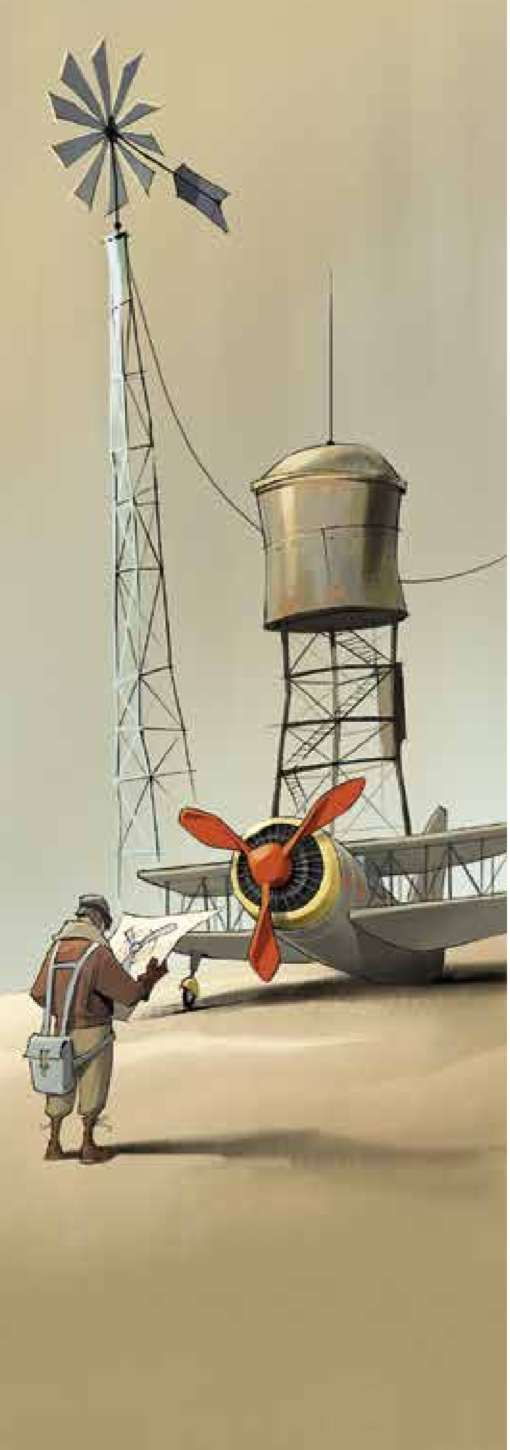


Тогда Пастер выделил кристаллы винной кислоты и рассмотрел их под микроскопом. Оказалось, что в природной кислоте форма всех кристаллов одинакова. А «лабораторная» кислота образует смесь двух видов кристаллов: одни точь-в-точь как природные, другие же – их зеркальное отражение, причём тех и других кристаллов поровну! Вот откуда взялась разница между природным и химическим продуктами.

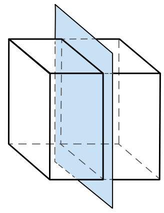
Позже выяснилось, что эта особенность винной кислоты связана со строением её молекул. Более того – существование обычных и зеркальных форм наблюдается у очень многих веществ и существ в живой природе.

В 1893 году английский физик лорд Кельвин придумал для этого явления термин *хиральность* – от греческого χείρ («рука», тот же корень, что и в слове «хирург»). Действительно, правая и левая руки – зеркальные отражения друг друга. Но их нельзя совместить, нельзя одинаково расположить в пространстве. Если вы их разместите так, чтобы положения пальцев совпадали, то ладони будут смотреть в разные стороны, а если ладони смотрят в одну сторону, то поразному расположатся пальцы. Можете проверить!

Кристаллы винной кислоты, которые наблюдал Пастер, очевидно, хиральны. Текст на этой странице тоже хирален – попробуйте-ка прочитать его в зеркале!



Но ясно и то, что не все объекты хиральны. Скажем, кубические кристаллы поваренной соли вполне совместимы со своими зеркальными отражениями. То же самое можно сказать о теннисном мяче или гранёном стакане. Разберёмся.



ЛЕВАЯ, ПРАВАЯ ГДЕ СТОРОНА?

У многих фигур есть плоскость симметрии – она делит фигуру на две такие части, что одна является точным зеркальным отражением другой. У куба, шара, конуса, правильной пирамиды есть плоскости симметрии. Конечно, такие фигуры не будут хиральными, не будут иметь двух разных форм – в зеркале «правая» часть перейдёт в «левую», а «левая» в «правую», при этом фигура в целом останется как была.

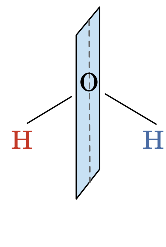
В таком случае, всякие ли фигуры, у которых нет плоскости симметрии, хиральны? Оказывается, нет. Хиральными не будут и фигуры, у которых есть центр симметрии (можете проверить). Или фигуры с необычным элементом симметрии, который называется зеркально-поворотной осью – они переходят в себя после поворота на определённый угол и отражения.

Но, может быть, тогда для хиральности обязательно нужно, чтобы не было вообще никакой симметрии? Нет, и это не так. Пропеллер на рисунке справа переходит в себя при повороте на 120°, то есть обладает поворотной симметрией, но он несовместим со своим отражением в зеркале.

Впрочем, большинство хиральных объектов вокруг нас всё-таки именно несимметричны, а отсутствие хиральности обычно связано с наличием плоскости симметрии. И это верно не только для видимых глазом объектов, но и для самых мелких частиц вещества – молекул.

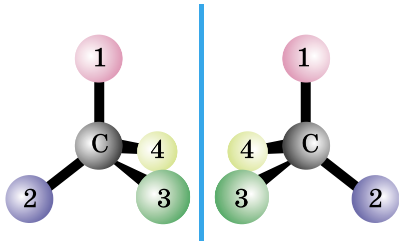
ОДИН ПРАВЫЙ, ДРУГОЙ ЛЕВЫЙ

Простейшие молекулы, как правило, не хиральны. Например, у молекулы воды есть плоскость симметрии. Есть она и у молекул азота, кислорода, углекислого газа – составных частей воздуха. Есть и у молекул многих других веществ: эфира, ацетона, уксусной кислоты, бензола…



А какие же молекулы всё-таки не совпадают со своим зеркальным отражением? Чаще всего это молекулы, в которых есть хотя бы один *асимметрический* атом углерода. Сейчас мы поясним, что это такое.

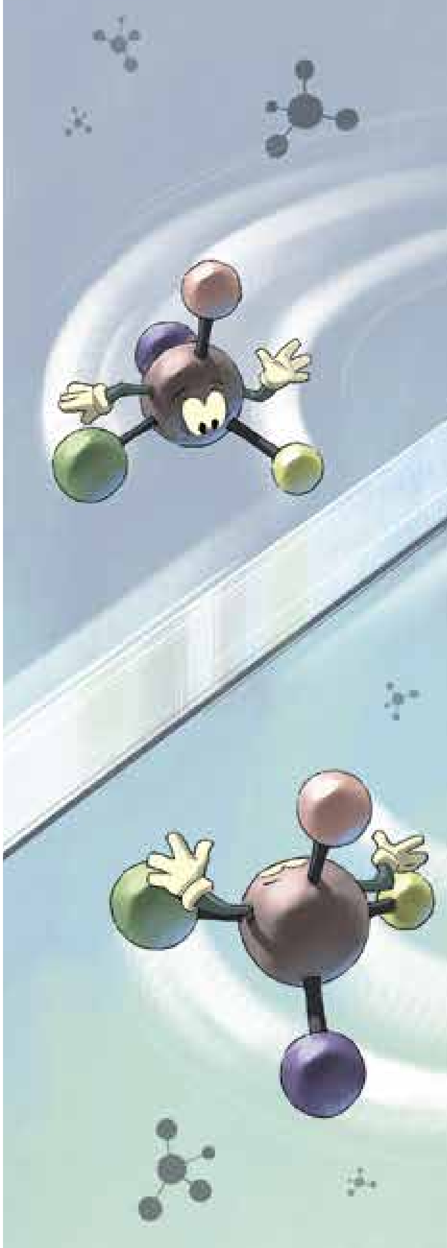
Атом углерода (а углерод составляет основу большинства веществ в живой природе) может образовывать четыре химические связи, направленные к вершинам воображаемого тетраэдра. Так вот, об асимметрическом атоме углерода говорят, когда все его четыре связи ведут к *неодинаковым* атомам или группам атомов. Как раз тогда зеркальные формы несовместимы одна с другой: скажем, если мы попытаемся совместить в пространстве атомы 1 и 2 (см. рисунок), то 3 и 4 поменяются местами.



Природные молекулы, обладающие хиральностью, практически всегда содержат хотя бы один асимметрический атом – *хиральный центр*. Искусственные хиральные молекулы бывают и без таких атомов. Например, это могут быть молекулы-спирали (так называемые гелицены), где зеркальные формы различаются направлением «закрутки». Или некоторые фуллерены, молекулы которых похожи на неаккуратно – то есть несимметрично – сшитый футбольный мяч...

Зеркальные формы для каждого хирального центра можно назвать «правой» и «левой». Правизна или левизна каждого центра в конкретной молекуле определяется по некоторым правилам. Для нас сейчас неважно, по каким. Важно, что именно от неё зависят некоторые свойства вещества.

Конечно, в молекуле может быть и больше одного асимметрического атома. Молекула винной кислоты, с которой мы начали наш рассказ, содержит два хиральных центра, причём однотипных. Поэтому для неё возможны три формы: «оба центра правые», «оба левые» (именно эти «правые» и «левые» кристаллы и наблюдал Пастер), или же два центра нейтрализуют друг друга – один «правый», другой «левый». Эта третья форма называется мезовинной кислотой и отличается как от «правой», так и от «левой».



Хиральных центров может быть и ещё больше: скажем, в молекуле глюкозы их четыре, а в молекулах белков многие сотни – ведь практически все аминокислоты, то есть «строительные блоки» белков, содержат асимметрические атомы. При этом из молекулы глюкозы, меняя «правизну» или «левизну» некоторых центров, можно получать и другие природные сахара. А вот в природных белках всё однозначно: все аминокислоты обязательно «левые». «Правые» аминокислоты в живой природе встречаются очень редко.

И наоборот – в молекулах ДНК, где содержится наследственная информация, все звенья «правые». Вот почему спираль ДНК закручена в определённую сторону.

А ВДРУГ ПРОГОЛОДАЕМСЯ?

Героиня книги Льюиса Кэрролла «Алиса в Зазеркалье» говорила котёнку Китти: «Не знаю, можно ли пить зазеркальное молоко». Алиса правильно сомневалась. Если все молекулы этого молока окажутся зеркальными отражениями молекул обычного молока, то пить его обычным людям и животным будет, скорее всего, нельзя.

Во-первых, оно не будет усваиваться. Белки и сахара, содержащиеся в молоке, имеют хиральные молекулы. А пищеварение Алисы и Китти приспособлено только к одной из форм этих молекул, но никак не к её зеркальному отражению. Ведь белки-ферменты, нужные для переваривания, сами несимметричны, и такое взаимодействие будет похоже на попытку надеть левую перчатку на правую руку.

Во-вторых, это молоко будет иметь непривычный вкус и запах. Наши обонятельные и вкусовые рецепторы неплохо различают зеркально симметричные молекулы. Например, одна и та же молекула в «левом» и «правом» вариантах отвечает соответственно за запахи тмина и мяты, другая создаёт запах лимона или же апельсина. Природные «левые» аминокислоты отличаются по вкусу от своих «правых» аналогов, зачастую очень заметно. И так далее. Так что вряд ли умненькая Китти даже притронется к зазеркальному молоку.

Наконец, зазеркальное молоко запросто может оказаться ядовитым. «Левые» и «правые» формы многих молекул по-разному воздействуют на организм.

Так, известно много лекарств, у которых лечебный эффект имеет лишь одна из двух форм, а другая в лучшем случае бесполезна, в худшем – вредна и опасна. И порой это выяснялось уже в процессе их использования…

А вот пить чистую зазеркальную воду, скорее всего, можно! И дышать зазеркальным воздухом можно. Если вы внимательно прочли эту статью, то уже знаете причину.

«Я БЫЛ ТОГДА ОЧЕНЬ МАЛЕНЬКИМ И ПОЭТОМУ НИЧЕГО НЕ ПОМНЮ»

Мы уже говорили, что все аминокислоты в природных белках – «левые», а все звенья ДНК – «правые». Но как так получилось – загадка. Ведь в начале времён, когда на Земле происходил синтез разных веществ из простейших симметричных молекул, должны были образовываться равные количества «левых» и «правых» молекул всех видов (как у Пастера при лабораторном синтезе винной кислоты!). Значит, белки и ДНК должны были затем строиться из смеси «левых» и «правых» звеньев. Но жизнь устроена иначе – почему?

Действительно, хиральность – одна из многих нерешённых проблем в вопросе происхождения жизни на Земле. Время от времени выдвигаются различные идеи. Например, учёные обнаружили, что часть космического излучения «закручена» в определённом направлении (как говорят, имеет круговую поляризацию), и когда-то это могло сдвинуть природные процессы в нужную сторону. Есть и другие гипотезы. Но пока ни одна не стала общепринятой.

Впрочем, польский фантаст Станислав Лем в «Звёздных дневниках Ийона Тихого» выдвинул оригинальную версию. Когда-то на безжизненной Земле остановился корабль пришельцев, и его нетрезвые пилоты в шутку создали жизнь на планете: вылили на скалы испорченные вещества из холодильника и размешали их лопатой и кочергой, скособоченными влево. С тех пор все белки состоят из «левых» звеньев.

Что ж – не исключено, что так оно и было.

Автор выражает глубокую благодарность профессору С.С.Трачу, чьи лекции по стереохимии на химическом факультете МГУ очень помогли в написании этой статьи.

Художник Алексей Вайнер

Валентина Кириченко,
Евгений Смирнов

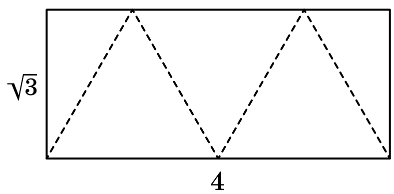
Молочный пакет, или Пирамидка из прямоугольника

Ваши бабушки и дедушки помнят, что раньше молоко продавалось в стеклянных бутылках с широким горлышком, которое закрывалось крышечкой из фольги. В таких же полулитровых бутылках продавались кефир и ряженка.

Первые картонные молочные пакеты появились в Советском Союзе в 1959 году. Однако эти пакеты были не прямоугольными параллелепипедами, как сейчас, а имели форму тетраэдра – правильной треугольной пирамиды. В такой пакет помещалось поллитра молока. В быту их обычно называли «пирамидками» или «треугольничками». Эта упаковка – она называется «Tetra Classic» – была разработана шведской компанией «ТетраПак»; кстати, этой же фирме принадлежит и конструкция пакета-параллелепипеда, «Tetra Brick».

Сейчас пирамидальные молочные пакеты в России почти не встретишь, однако они очень распространены во многих других странах – например, в Китае и в странах Латинской Америки. А в России иногда можно найти упаковки порционных сливок, разлитых в совсем маленькие «пирамидки».

Одно из достоинств пакетов в форме тетраэдра – простота их производства. Оказывается, тетраэдр не обязательно клеить из треугольников – его можно сделать из прямоугольного листа! Убедитесь в этом сами: на рисунке изображена развёртка тетраэдра. Перенесите её на отдельный лист плотной бумаги, наметьте линии сгиба и склейте прямоугольник по короткой стороне (например, с помощью скотча) – получится цилиндр. Теперь «защипните» верхнее и нижнее основания цилиндра так, чтобы они были перпендикулярны друг другу.

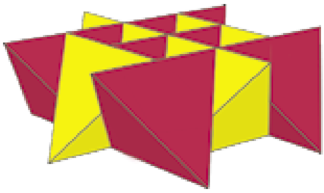


У вас получится правильный тетраэдр! Кстати, именно так и устроена линия по розливу молока в пакеты-пирамидки: автомат нарезает эти пакеты из длинного картонного цилиндра. В цилиндр непрерывно подаётся молоко, и заполненная молоком часть поочерёдно сминается и проклеивается при помощи тепловой сварки то в одном направлении, то в перпендикулярном. Каждая такая линия склейки – это верхнее ребро одного тетраэдра и нижнее ребро следующего. По этим линиям пакеты и отрезаются.

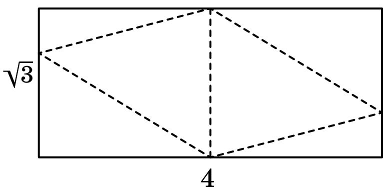
ЗАДАЧИ

1. Найдите четыре середины рёбер полученного тетраэдра, образующие квадрат.

2. Придумайте способ упаковывать пирамидальные молочные пакеты для перевозки, чтобы между ними оставалось как можно меньше свободного места. Например, пакеты можно складывать в ряд, как на рисунке, а потом класть ряды друг на друга.



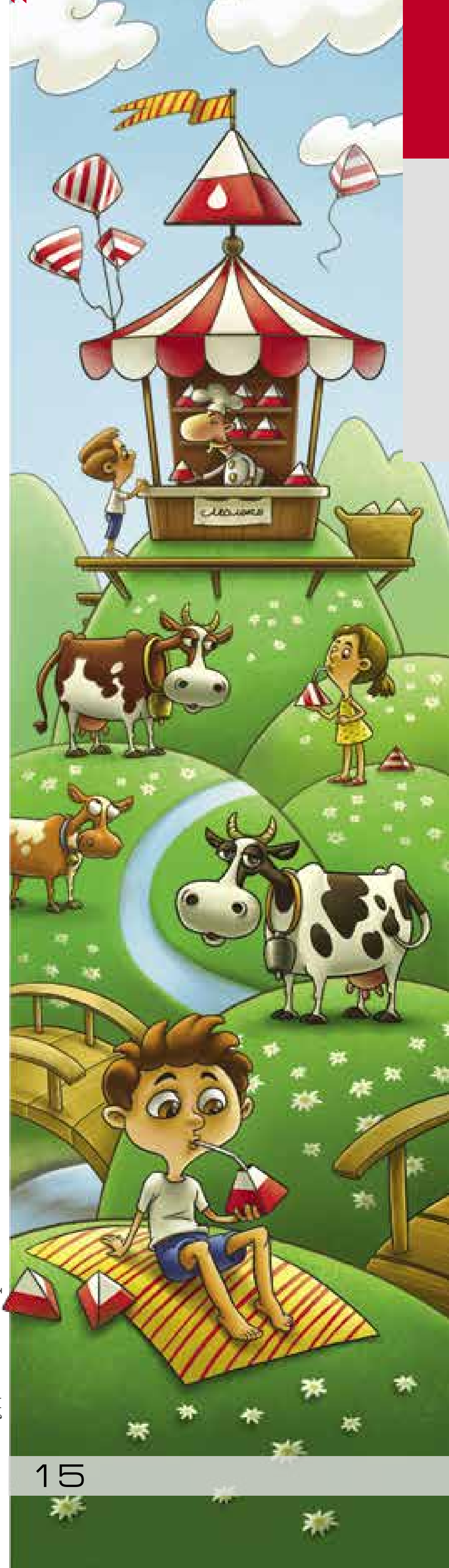
3. Из прямоугольника можно сложить другой тетраэдр. Убедитесь в этом, согнув лист по линиям сгиба, как на рисунке.



4. Если сминать цилиндр не в перпендикулярных друг другу направлениях, а под углом, то пакеты получатся тоже в форме тетраэдра, но не правильного. Чем такой пакет хуже?

5. Из цилиндрического бумажного кольца склеен молочный пакет в виде правильного тетраэдра. Разрежьте этот пакет в цилиндрическое кольцо, высота которого равна половине длины ребра тетраэдра.

Ответы в следующем номере.



Художник Мария Усеинова

Андрей Андреев,
Алексей Панов,
Пётр Панов

ЛЕТАЮЩИЕ СТАКАНЧИКИ БРЮСА ЙИНИ

Недавно нам попался ролик «Physics of toys – Cup Flyers», его автор – школьный учитель физики Брюс Йини (Bruce Yeany). И теперь летающие стаканчики стали нашей любимой игрушкой, мы сейчас только ими и занимаемся. Попробуйте, может это и вас увлечёт.

Рис. 1. Брюс Йини запускает стаканчики

Возьмите пару бумажных или пластиковых стаканчиков, приставьте их друг к другу донышками и скрепите скотчем (рис. 2). Ещё понадобится достаточно длинная тонкая резинка. Её можно связать из нескольких канцелярских резинок (см. рисунок внизу с. 17).

Рис. 2. Стаканчики и резиночки

Для запуска нужно два или три раза с хорошим натяжением обмотать резинку вокруг стаканчиков по линии склейки и запустить их, как из рогатки. На рисунке 3 изображена характерная траектория стаканчика с петлёй возврата и последующим наклонным спуском.

Рис. 3. Стаканчики в полёте

На рисунке 3 вращение стаканчиков непосредственно не наблюдаемо. Чтобы сделать его видимым, мы, следуя Йини, поместили между стаканчиками маленькую батарейку и подключили к ней маленький светодиод (рис. 4).

Рис. 4. Стаканчики с батарейкой и светодиодом

Вот теперь можно зафиксировать всю траекторию целиком (рис. 5), увидеть, как стаканчики вращаются, оценить скорость вращения и её изменение во времени.

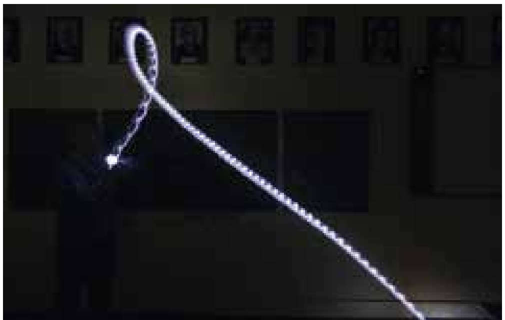
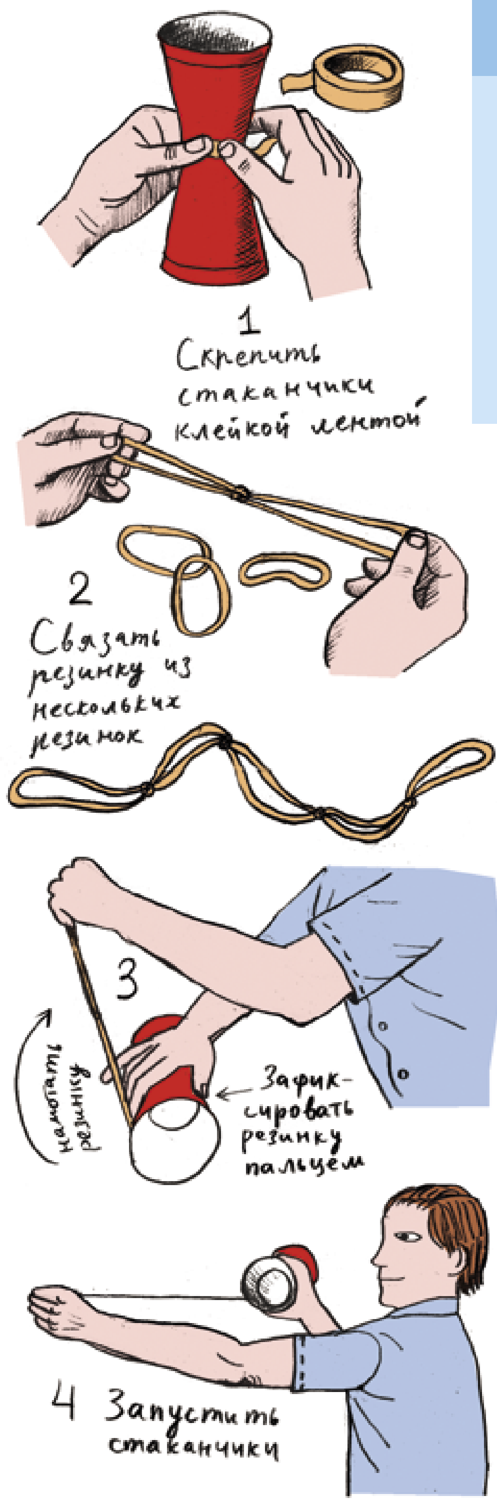


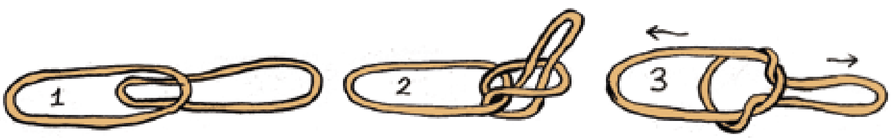
Рис. 5. В полёте

Даже первый взгляд на траекторию показывает, что, кроме силы тяжести и силы сопротивления воздуха, на вращающиеся стаканчики должна действовать ещё какая-то сила. И она хорошо известна – это сила Магнуса. Именно она заставляет искривляться траектории вращающихся мячей, снарядов и пуль. Сила Магнуса, действующая на вращающееся тело, во многом похожа на подъёмную силу, поддерживающую в воздухе самолёты и другие летательные аппараты. Так же как подъёмная сила, сила Магнуса перпендикулярна траектории тела, и ещё её направление зависит от направления вращения этого тела. Как рассчитать траекторию летательного аппарата, на который действует подъёмная сила, рассказано в статье «Планер Жуковского и движение в скрещенных полях» («Квант» №1, 2016). Тот же самый подход применим и к летающим стаканчикам, на которые действует сила Магнуса.

Запускайте стаканчики и смотрите, как они летают, вживую. Обязательно посмотрите на YouTube этот самый ролик «Physics of toys – Cup Flyers». И ещё загляните там же на канал под названием «Homemade Science with Bruce Yeany», там есть много интересного.



Художник Артём Костюкевич



Константин Кохась

КАК БУСЕНЬКА ПОСЕТИЛА ТАРАКАНЬИ БЕГА

Генератор Жутких Кошмаров лежал в глубине пещеры за камушком. Он выглядел как безобидный невзрачный ящичек с красной кнопкой на верхней стороне.

– Ну и где же сокровища? – недовольно проворчал таракан Кузька, пока Горгулий, Огрыза и Бусенька осматривались. – Это, что ли? – И Кузька разочарованно ткнул лапой в красную кнопку.

Генератор щёлкнул, и в пещере сразу стало темно. Потом раздалось тяжёлое сопение и что-то заскрежетало, словно кто-то очень тяжёлый и сильный пытался раздвинуть стены пещеры. Когда стены достаточно раздвинулись, включился прожектор, осветив огромное жуткое чудище, стоявшее перед кладоискателями. Чудище пинцетом держало Кузьку и внимательно его разглядывало.

– Кажется, это всё-таки съедобно! – наконец сказало чудище и положило Кузьку в стеклянную банку, стоявшую рядом на столике. – Можно приступать!

Вспыхнул большой экран, на нём появилось изображение, очень похожее на питона Уккха в ядовито-зелёном галстуке-бабочке.

– Дорогие зрители, – то ли улыбнувшись, то ли оскалив зубы, сказало изображение, – следующий номер нашей программы – жуткий, кровожадный и очень, повторяю, очень-очень голодный.... Злобнопотам!

Чудище мрачно посмотрело на зрителей, слегка поклонилось и выпустило из ушей клубы едкого дыма. Ни имя, ни внешний вид чудища не сулили зрителям ничего хорошего.

– Начинаем тараканьи бега! – объявил Злобнопотам низким могильным голосом. – Вот это – беговая дорожка.

Луч прожектора тут же осветил обруч, горизонтально закреплённый с помощью фиксатора. Злобнопотам сделал неуловимое движение когтистой лапой, и в ней появилась бутылка масла.

– Я смазываю дорожку свежайшим вкуснейшим оливковым маслом. Ммм... прекрасный запах!

И Злобнопотам, понюхав смазанный обруч, отправил бутылку с остатками масла в пасть. Потом он вытряхнул на столик содержимое стеклянной банки.

– А вот и наши бегуны! Перед вами четыре таракана. Три из них – обычные роботы, а четвёртый – Кузька! На голову каждому таракану надет новейший нейросенсорный шлем НШ-19У. С его помощью мы заставим таракана бежать по кругу с постоянной скоростью, которая устанавливается вот этим пультом, – показал Злобнопотам. – Сейчас тараканы побегут по дорожке, и как только кто-нибудь свалится, я всех съем! Вы все будете свидетелями и даже соучастниками! А потом я съем и вас тоже!!

– А если не свалятся, мы сами тебя съедим! – храбро сказал Горгулий, пытаясь при этом улыбаться как можно шире. Улыбка получилась пострашнее, чем у Уккха, но на Злобнопотама это не произвело никакого впечатления. Он пощёлкал шипами на загривке, достал большое увеличительное стекло и укоризненно посмотрел сквозь него на Горгулия.

– Свалятся как миленькие! Пульт не даст запускать тараканов с одинаковыми скоростями. Дорожка узкая и скользкая, одни тараканы будут догонять других, и при обгоне кто-то обязательно упадёт!

– Если обгонять на фиксаторе, то никто не упадёт, – тихо сказала Бусенька.

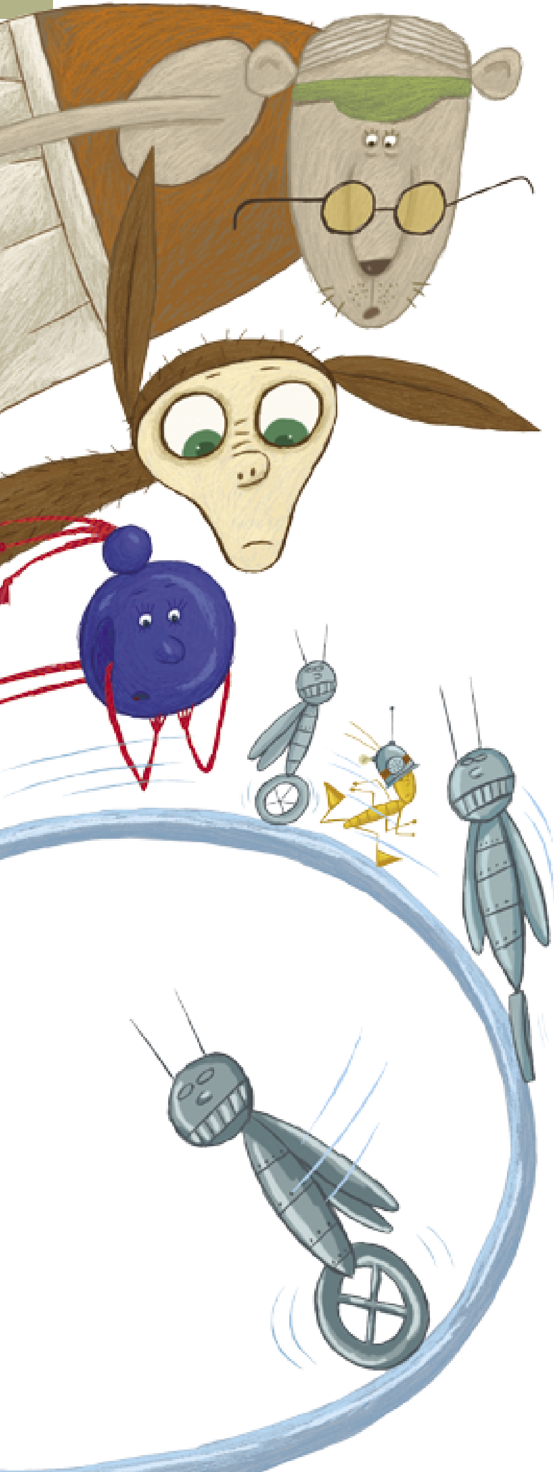
– Похоже, там могут разминуться сразу несколько тараканов, – прошептала в ответ Огрыза.

– Итак, запускаем первого таракана! Для каждого таракана на пульте есть колёсико, задающее скорость, – пояснил Злобнопотам и, поставив на фиксатор первого таракана, крутанул первое колёсико. – Вот, пожалуйста, – установилась скорость 3 см/с. Теперь нажимаем кнопку «Старт»!

Таракан вздрогнул, на его шлеме загорелась надпись «Т-3», и он побежал по кругу.

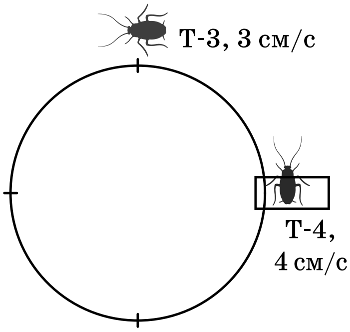
– Право второго запуска предоставляется нашему храброму, зубастому, но от того ничуть не менее вкусному другу – Горгулию! – сказало изображение Уккха. Злобнопотам протянул пульт Горгулию и поставил на фиксатор второго таракана.

Горгулий задумчиво посмотрел на пульт. Таракан



Т-3 уже пробежал один круг и пошёл на второй. Горгулий выставил вторым колёсиком скорость 4 см/с, и когда Т-3 пробежал ровно четверть обруча, нажал на вторую кнопку «Старт». На шлеме второго таракана загорелась надпись «Т-4», и он бросился вдогонку за Т-3.

А поскольку бежал он в 4/3 раза быстрее, чем Т-4, то за время, пока Т-3 завершил оборот, преодолев оставшиеся три четверти обруча, таракан Т-4 пробежал четыре четверти обруча! Оба таракана встретились на фиксаторе, и Т-4, обогнав Т-3, возглавил гонку.

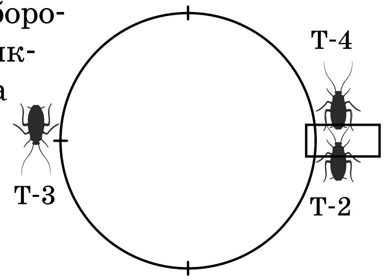


– Ура! – тихо сказла Бусенька. – Сейчас Т-4 вырвался вперёд. За то время, пока Т-3 пробежит 3 оборота, Т-4 пробежит 4 оборота, и значит, обгон опять произойдёт на фиксаторе! И так далее!

– Первый обгон прошёл успешно! Третий запуск осуществляет Огрыза!! – сказало изображение Уккха на экране, и Злобнопотам яростно швырнул в него пинцет. Пинцет проколол правую щёку изображения и, звякнув, упал позади экрана. – Упс! – обиженно сказало изображение Уккха и исчезло.

Тараканы меж тем продолжали бег. После первого обгона Т-4 сделал уже почти два оборота, а Т-3 – почти полтора. Огрыза поставила скорость 2 см/с, дождалась, когда Т-4 забежит на фиксатор, и нажала третий «Старт». На шлеме третьего таракана загорелась надпись Т-2, и он пристроился за тараканом Т-4, отставая, так как двигался в два раза медленнее.

– Здóрово! – сказал Горгулий. – Пока Т-2 сделает один оборот, Т-3 пробежит полтора оборота, а Т-4 – два, значит, все три таракана встретятся на фиксаторе. И дальше тоже всё будет в порядке – пока Т-2 сделает один оборот, Т-4 сделает два оборота и обгонит Т-2 как раз на фиксаторе. А Т-3 за время, пока Т-2 делает два оборота, пробегает три оборота, и их встреча тоже будет на фиксаторе. Ты, Огрызочка, просто снайпер!



– Третзапусксделн! Сетрканы функцнирвштрежиме! Почетнправочтвёртзапспредстляетс Бусеньке!! – протараторило изображение Уккха, чтобы побыстрее улизнуть, но Злобнопотам оказался проворнее: страшно зарычав, он швырнул в него банку. Банка проделала дыру во лбу изображения и звонко разбилась, ударившись о стену пещеры. – Мама! – испуганно сказало изображение и погасло.

Злобная выходка не помешала Злобнопотаму поставить на фиксатор последнего таракана. Остальные тараканы бодро бежали по кругу. К моменту, когда все три таракана, как и предсказывал Горгулий, встретились на фиксаторе, Бусенька установила скорость 8/3 см/с и запустила четвёртого таракана.

Шлем четвёртого таракана замигал противными красно-синими огоньками.

– Произошёл запуск последнего тара...– попыталось было объявить опять появившееся изображение Уккха, но Злобнопотам швырнул в него столик и одновременно плюнул огненным шаром. Экран с изображением и столиком полетел догорать куда-то далеко вглубь пещеры. Наконец, стукнувшись о стенку и осыпав всё вокруг красочными искрами, столик и дымящийся экран рухнули на пол.

Раздался щелчок, Злобнопотам дёрнул себя за ухо и взлетел, сдуваясь, как воздушный шарик. Свет стал гаснуть.

– Вы смотрели Жуткокошмарное шоу «Тараканьи бега», – простонал из темноты голос Уккха.

Тут друзья увидели, что в пещеру по-прежнему проникает дневной свет, а у дальней стенки возле Генератора Жутких Кошмаров, разбитого упавшим на него столиком, сидит запыхавшийся таракан Кузька в новейшем нейросенсорном шлеме НШ–19У с надписью Т-2.

– Уж и не думал, что мы выкрутимся из этого шоу, – сказал Кузька. – Очень неприятно, когда вас всё время обгоняют на скользкой дорожке. Как тебе удалось подобрать скорость четвёртого таракана? – спросил он у Бусеньки.

– Очень просто. Допустим, быстрый таракан, бегущий со скоростью v, обгоняет медленного таракана,

бегущего со скоростью $u<v$. Что после этого происходит с точки зрения медленного таракана? Кузька, когда тебя обгоняли другие, что ты при этом наблюдал?

– Ничего не наблюдал. Тебя обгоняет какой-то Т-3 и не спеша убегает всё дальше и дальше.

– Правильно. «Не спеша» – это потому что с твоей точки зрения он удаляется от тебя со скоростью $v-u$. Следующий обгон произойдёт, когда он удалится от тебя на полную длину дорожки. Допустим, что твоя скорость больше скорости вашего разбегания в k раз, то есть $u=(v-u)k$. Знаешь, что это значит? Это значит, что за то время, пока быстрый таракан удалится от тебя на длину дорожки и подбежит к тебе сзади для следующего обгона, ты сам сделаешь по этой дорожке k оборотов! Значит, если k целое, следующий обгон произойдёт в той же точке обруча, что и предыдущий! А так как первый обгон происходил в момент старта, на фиксаторе, то и все следующие обгоны тоже оказывались на фиксаторе.

Заметим теперь, что за время между двумя обгонами ты пробежал k оборотов, а быстрый таракан – $k+1$ оборотов. Следовательно, для ваших скоростей выполняется правило: отношение скоростей равно отношению двух последовательных натуральных чисел $u:v=k:(k+1)$.

В случае, когда скорости тараканов заданы так, что это правило выполнено для каждой пары тараканов, Злобнопотам совершенно не опасен. Например, четвёртый таракан бежал со скоростью 8/3 см/с, а второй – 4 см/с. Отношение их скоростей равно $(8/3):4=2:3$, и тогда второй будет обгонять четвёртого всё время в одном и том же месте. Только не забудь: правило должно работать не только для второго и четвёртого тараканов, но и для всех других пар.

– Как же ты подобрала число 8/3? – спросила Огрыза. – Нужно соблюсти столько условий...

– Просто взяла и подобрала. Это-то как раз не очень трудно. С моим-то интеллектом!

– Но пульт позволял ставить только целые значения скоростей! – вмешался Горгулий.

– Пока Злобнопотам швырялся банками, я взломала пульт, – покраснела Бусенька. – У меня просто не было другого выхода!

Художник Инга Коржнева

Саша Прошкин и снежные бараны

Иван Кобиляков

Однажды Саша Прошкин вместе с инспектором охраны Алексеем Дружининым сел в вертолёт и полетел ловить браконьеров. Они долго летали над глубокими каньонами и водопадами, над озёрами и ледниками. К счастью, браконьеры в тот день были благоразумны и не стали нарушать границ охраняемой территории. Когда вертолёт пролетал над самыми крутыми в Заповеднике горными склонами, Саша разглядел в иллюминатор животных с большими и красивыми рогами. Они стояли на самом краю пропасти и преспокойно жевали недавно появившуюся из-под снега травку.

– Кто это? – спросил Саша инспектора охраны.

Вместо ответа Алексей Дружинин взглянул на часы – лететь домой было ещё довольно долго – и рассказал вот такую древнюю легенду.

Давным-давно далеко на юге от нашего Заповедника жили горные бараны, которых за их толстые и красивые рога называли толсторогами. При каждом удобном случае эти животные хвастались перед другими зверями: «Смотрите, какие красивые и тяжёлые рога! Ни у кого таких больше нет!». Но был один секрет, который они бережно хранили из поколения в поколение... Рога внутри были абсолютно пустыми!

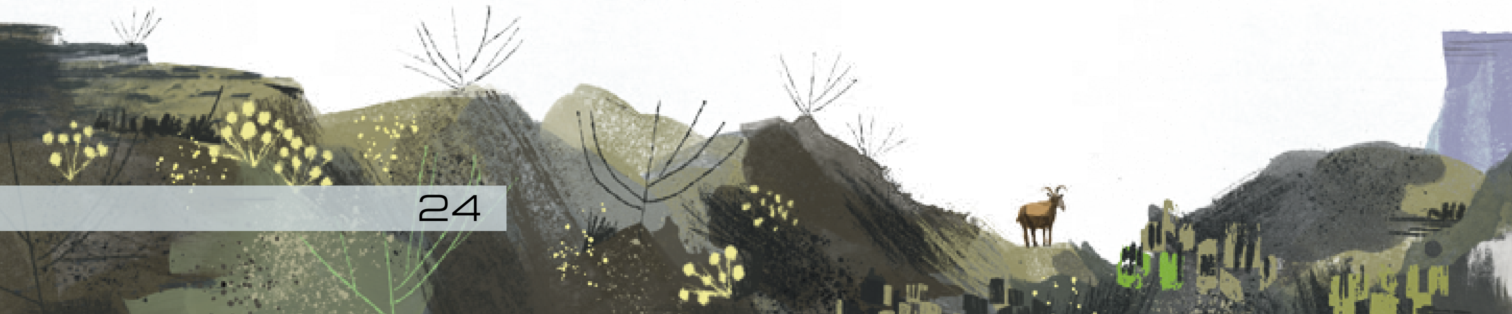
Тайну нужно было сберечь во чтобы то ни стало. На общем бараньем совете было решено, что ни один горный баран не должен сбрасывать свои рога, а уж тем более терять их, как это делают, например, каждый год северные олени. Запрет был

довольно строгим, но ведь если его нарушить, позор ляжет на всю родню. А толсторогов на Земле, как известно, много: это и камчатские, и якутские толстороги, и американские бигхорны… Что же теперь, всем позориться?

Но была среди горных баранов с пустыми рогами одна Неугомонная овца. Рожки у неё были не очень большие, но она всегда хвасталась ими сильнее других. Однажды она так разошлась в своём хвастовстве, что оступилась и упала с обрыва. Один рог у неё и отвалился. На беду мимо пролетала маленькая птичка-пуночка. «У толсторогов рога пустые!» – закричала пуночка на всю округу. С тех пор толсторогов стали называть полорогими, что значит «с пустыми рогами».

Неугомонную овцу за её проступок горные бараны выгнали из стада – пришлось ей идти, куда глаза глядят. Только один Смелый баран пошёл вместе с ней, чтобы не оставлять одну в беде. Шли они больше тысячи километров. И наконец дошли до плато Путорана. Залезли на самую высоту, куда ни один другой зверь никогда не залезал, и стали там жить среди снегов. Долго жили – и с ветром боролись, и с метелями. Дети у них появились и внуки… Все звери уже позабыли про то, как Неугомонная овца свой рог потеряла. Зауважали поселившихся на плато Путорана баранов за их смелость и умение противостоять непогоде. Стали их путоранскими снежными баранами называть, а иногда даже путоранскими толсторогами.

Когда история закончилась, вертолёт, в котором сидели Саша Прошкин и инспектор охраны Алексей Дружинин, приземлился на площадке перед глав-



ным зданием Заповедника. Навстречу путешественникам вышел биолог Михаил Зверев.

– А мы путоранских толсторогов видели! – начал было хвастаться Саша Прошкин, но, вспомнив легенду про горную овцу, наказанную за хвастовство, продолжил уже поспокойнее: – Правда, они красивые?

– Вам очень повезло! – порадовался за Сашу Михаил. – Путоранских снежных баранов, или, как их ещё называют, путоранских толсторогов, осталось всего около 800 особей. Это очень редкое животное. Их ближайшие родственники живут за тысячу километров отсюда. Как толстороги проникли на плато Путорана– большая загадка...

«А я теперь знаю, как они появились!» – подумал Саша Прошкин, вспомнив легенду, но не стал перебивать старшего.

А Михаил Зверев тем временем продолжил свою небольшую научную лекцию:

– Природа на плато Путорана очень суровая, и снежным баранам приходится у нас нелегко – ты сам, должно быть, видел с вертолёта, в каких опасных местах они пасутся. С раннего детства ягнята привыкают ходить по скалам и осыпям, куда не могут добраться хищники. Но всё же враг номер один у толсторогов – не волк и не росомаха, а человек. Чтобы обезопасить редкий подвид, его занесли в Красную Книгу, а в местах его обитания был создан наш Заповедник.

Фото автора

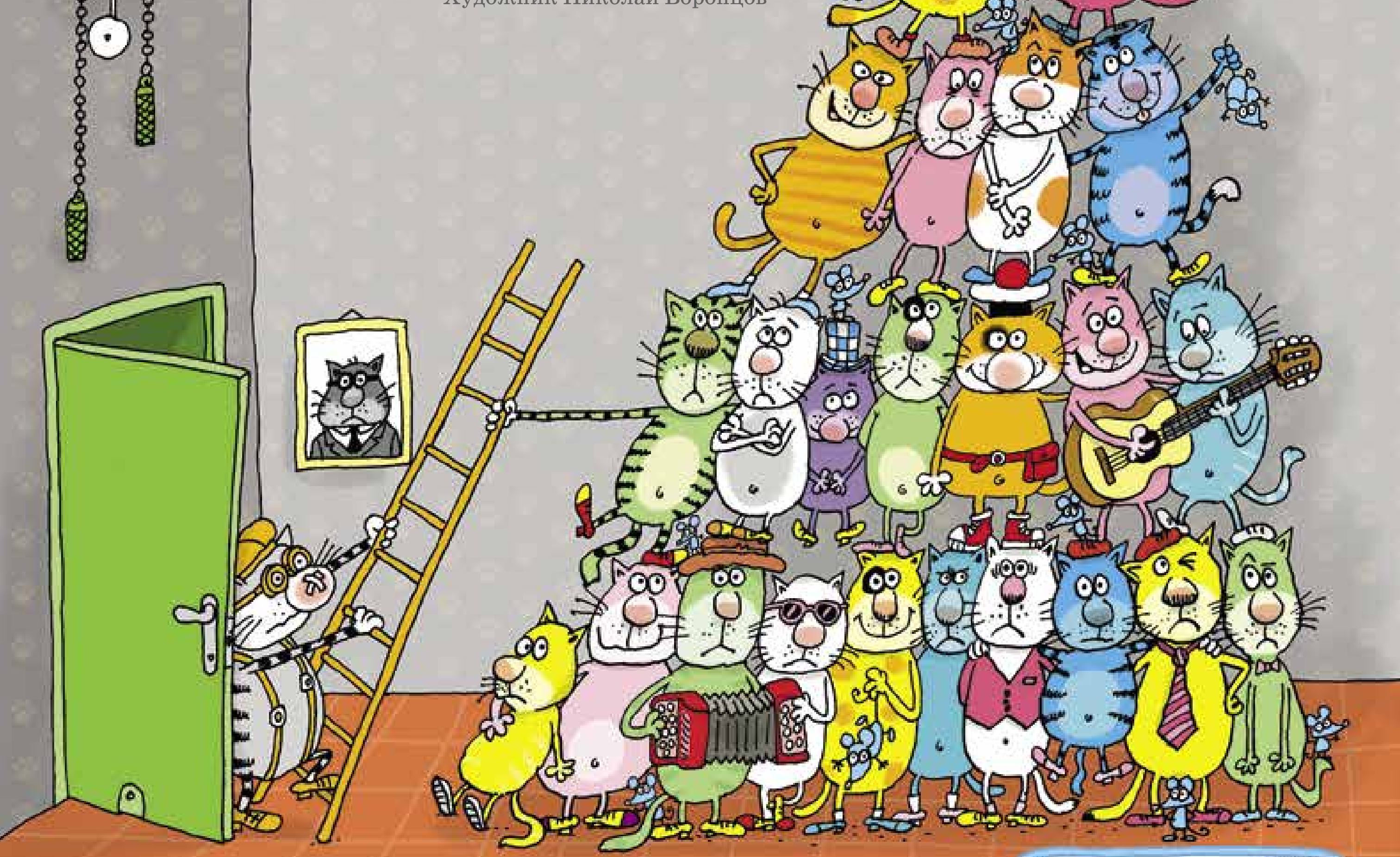
Художник Ольга Демидова

Воздушный шарик

Валерия Сирота

С математического праздника мы принесли домой два воздушных шарика. Правда, к утру они уже изрядно сдулись и не могли даже вместе удержать на весу лёгонькую коробочку. Однако с помощью одной только умной головы, не используя никаких дополнительных приспособлений, мы смогли подвесить эту коробочку на этих двух шариках к самому потолку. Как мы это сделали и почему это удалось?

Художник Николай Воронцов



Найдите 11 мышек.
Найдите кота в кедах.

LXXXIII САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ II ТУРА

Материал подготовил
Константин Кохась

1 (6 класс). На доске написаны 10 натуральных чисел. Оказалось, что произведение любых четырёх из них кратно 30. Докажите, что хотя бы одно из написанных чисел само по себе кратно 30.

Александр Голованов

2 (6 класс). Все клетки доски 8×9 покрашены в серый цвет. В противоположных углах доски стоят фигуры «БКС-маляр» и «БСК-маляр». Из клетки, в которой стоит БКС-маляр, он может перейти в любую соседнюю (по стороне) свободную клетку и перекрасить её: из белого цвета – в красный, из красного – в серый, из серого – в белый. БСК-маляр при своём ходе тоже переходит в соседнюю по стороне свободную клетку, но перекрашивает её из белого цвета в серый, из серого в красный, а из красного в белый. Маляры ходят по очереди, первым ходит БКС-маляр. Докажите, что БСК-маляр независимо от ходов первого может действовать так, чтобы серых клеток всегда было не менее 40.

Екатерина Куликова

3 (8 класс). Серёжа выписывает в строчку различные числа. Для каждого очередного числа, среди написанных ранее, количество чисел, бóльших него, и количество чисел, меньших него, отличаются не более чем на 1. Известно, что 84-е число меньше, чем 219-е. Какое число больше: 83-е или 2017-е?

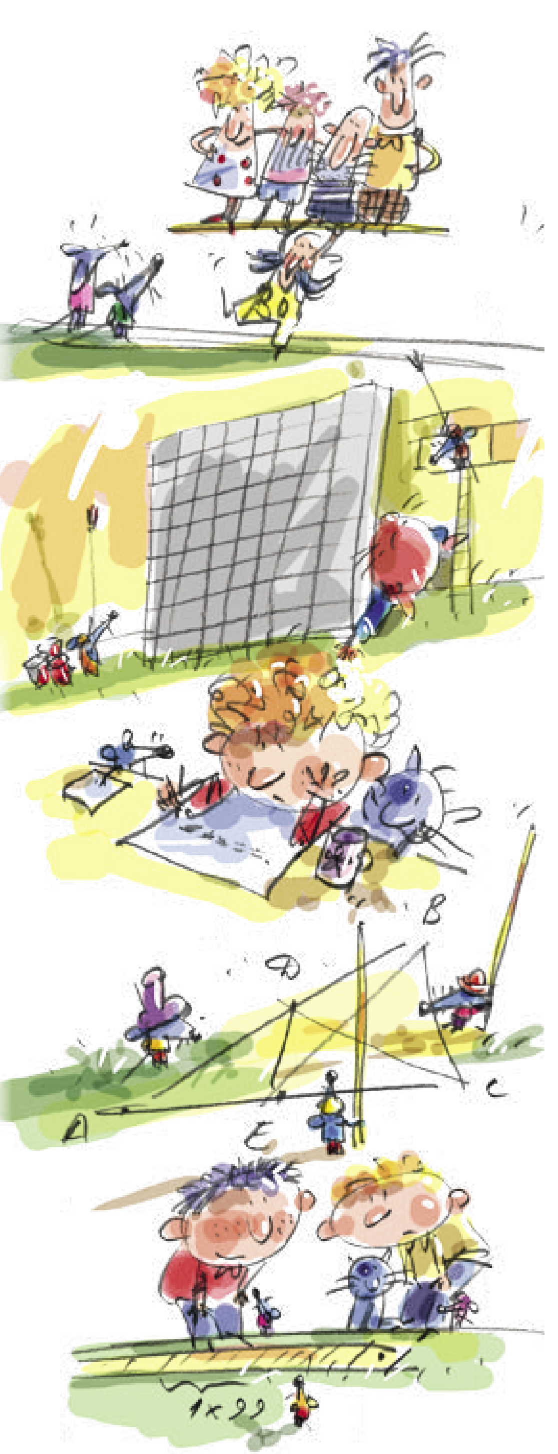
Александр Голованов

4 (7 класс). На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки D и E соответственно, причём $AD=AE$. Докажите, что из отрезков BE, CD и BC можно составить треугольник.

Александр Кузнецов

5 (8 класс). Петя и Вася играют в игру: дана клетчатая полоса 1×99, в которой первая и последняя клетки помечены точками. Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно закрасить две соседние по стороне незакрашенные клетки. Также один раз за игру (один раз на двоих) можно закрасить одну незакрашенную клетку с точкой. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре?

Сергей Берлов



Художник Сергей Чуб

ПОПРАВКА

В «Квантике» №2 за 2017 год в решении задачи 20 «Нашего конкурса» были допущены опечатки. Вместо $12x-687$ должно быть $12x-685$, откуда правильный ответ: на 4-м или на 16-м этаже. Приносим свои извинения.

НАШ КОНКУРС («Квантик» № 4, 2017)

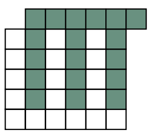
36. *Каждый номер журнала «Квантик» состоит из обложки и восьми двойных листов: они вкладываются друг в друга и соединяются скобами. На каком из восьми листов сумма номеров всех четырёх страниц листа самая большая?*

Ответ: сумма номеров одинаковая на всех листах. Это достаточно проверить для соседних двойных листов. У листа, который ближе к обложке, первые две страницы имеют номера на 2 меньше, а последние две – на 2 больше, чем у второго листа. Тем самым сумма одинаковая.

37. *Ноутик записал на доске три числа: 1/9, 1/10 и 1/11. Квантик за ход называет любое число, а Ноутик увеличивает ровно одно из чисел на доске на число, названное Квантиком. Может ли Квантик делать ходы так, чтобы обязательно в какой-то момент хоть одно из трёх чисел на доске превратилось в 1?*

Ответ: да, может. Приведём дроби к общему знаменателю: 110/990, 99/990, 90/990. Если увеличить одну из дробей на 1/990, то к числителю прибавится 1, а знаменатель не изменится. Значит, Квантик может каждый раз называть 1/990, и тогда, как бы ни действовал Ноутик, наступит момент, когда одна из дробей станет равной $990/990=1$.

38. *Фигуру, изображённую на рисунке, разрежьте по линиям сетки на две одинаковые части, из которых можно сложить квадрат 6×6 (части разрешается переворачивать).*



Ответ см. на рисунке.

39. *В волшебном дворце обитают прекрасные феи. Каждый день у всех фей, кроме одной, улучшается и обаятельность, и привлекательность, а у оставшейся феи – только одно из этих качеств (а другое может и ухудшиться). Однако за последний год все феи совершенно не изменились. Каково наибольшее возможное число фей во дворце? (В году 365 дней.)*

Ответ: 182 феи. Если какое-то качество у феи улучшалось каждый день, то стать прежней она не могла. Значит, для того чтобы фея не изменилась, необходимо, чтобы каждое её качество хотя бы один раз ухудшилось или всё время оставалось прежним. Если фей хотя бы 183, то суммарно у них качеств $183\cdot2=366$ – это больше, чем число дней в году. Но каждый день ухудшается или остаётся прежним только одно качество у одной феи. Значит, такого быть не могло.

Покажем, что фей могло быть 182. Тогда у них 364 качества. Выберем 363 из них и каждое ухудшим один раз за год, ровно на столько, на сколько оно улучшается за все остальные дни. А у оставшегося качества сделаем два ухудшения, опять же ровно на столько, на сколько оно улучшилось за остальные 363 дня. Тогда феи к концу года станут такими же, какими были в его начале.

40. *Из круга можно вырезать четырёхугольник, у которого две противоположные стороны равны a и c, а две другие – b и d. Толик Втулкин утверждает, что тогда из этого круга можно вырезать и четырёхугольник, у которого две противоположные стороны равны a и b, а две другие – c и d. Прав ли Толик? Решите задачу в случаях, когда исходный четырёхугольник*

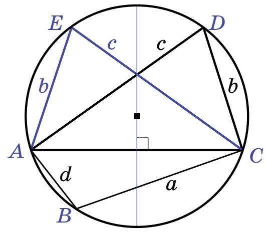
а) вписан в данный круг (вершины четырёхугольника лежат на границе круга);

б) не обязательно вписан, но выпуклый (диагонали лежат внутри четырёхугольника);

в) может быть невыпуклым (одна из диагоналей может лежать снаружи четырёхугольника).

Ответ: а) да; б) да; в) нет.

а) Обозначим вершины четырёхугольника A, B, C, D. Так как AC – хорда окружности, то серединный перпендикуляр к AC делит круг пополам. Построим точку E, симметричную точке D относительно серединного перпендикуляра. В силу симметрии точка E также будет лежать на границе круга, а также $AD=CE$ и $AE=CD$. Тогда четырёхугольник $ABCE$ – искомый: он лежит внутри круга, и длины его сторон такие же, как и у исходного четырёхугольника, однако их порядок изменился. (Фактически мы разрезали четырёхугольник по диагонали AC, перевернули треугольник ADC и снова соединили в четырёхугольник.) Обратите внимание, что мы пользовались только тем, что AC – хорда окружности, поэтому если точки B и D будут лежать внутри круга, то рассуждение останется верным.



б) Мы не приводим строгого доказательства, а изложим лишь идею.

Представим, что исходный четырёхугольник – шарнирный, то есть его можно двигать, а также сгибать во всех вершинах, не меняя длин сторон. Сначала подвинем его так, чтобы какие-то две его вершины попали на границу круга. Если на границу попали противоположные вершины, то дальше задача решается как в пункте а). Если же на границу попали две соседние вершины, то зафиксируем их и будем сгибать четырёхугольник (рис. 1). Так мы можем делать до тех пор, пока либо одна из его вершин не попадёт на границу круга (рис. 2), либо один из углов не станет равным 180° (рис. 3). В первом случае задача решается как в пункте а). Во втором случае четырёхугольник выродился в треугольник. Поменяем местами две стороны, угол между которыми равен 180° (рис. 4), и получим вырожденный четырёхугольник $ABED$, который также лежит внутри круга, но его стороны идут в другом порядке. Теперь немного согнём четырёхугольник $ABED$ в обратном направлении, чтобы он стал невырожденным, и получим искомый четырёхугольник.

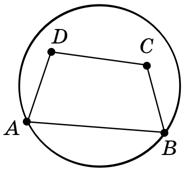


Рис. 1

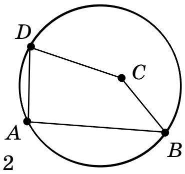


Рис. 2

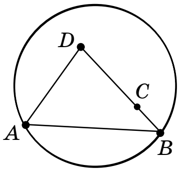


Рис. 3

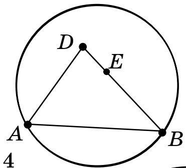


Рис. 4

в) Возьмём четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = BC = 1000$, $CD = DA = 1001$, который лежит в круге диаметром 1002 (рис. 5).

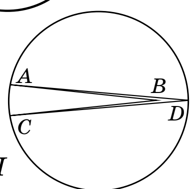
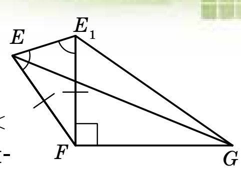


Рис. 5

Возьмём четырёхугольник $EFGH$ со сторонами $EF = GH = 1000$, $FG = HE = 1001$ и покажем, что он не может лежать внутри круга. Так как противоположные стороны четырёхугольника равны, это параллелограмм. Один из его углов, скажем EFG, неострый, а значит, в треугольнике EFG: $EG^2 \geqslant EF^2 + GF^2$ при прямом угле будет равенство, что следует из теоремы Пифагора). Откуда $EG > 1400$, что больше диаметра круга, противоречие.

Докажем использованный нами факт: в треугольнике EFG с тупым углом F выполнено $EG^2 > EF^2 + GF^2$. Из точки F восстановим перпендикуляр FE_1 к FG туда же, где лежит точка E, длины FE. Так как треугольник FEE_1 равнобедренный, то $\angle FEE_1 = \angle FE_1E$. Тогда $\angle GEE_1 < \angle FEE_1 = \angle FE_1E < \angle GE_1E$. Значит, в треугольнике GEE_1 выполнено $GE > GE_1$ (против большего угла лежит большая сторона). А по теореме Пифагора $GE_1^2 = E_1F^2 + GF^2 = EF^2 + GF^2$.



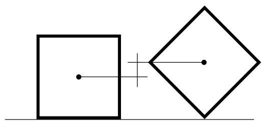
ЗАДАЧИ ПРО КОЛЁСА («Квантик» № 5, 2017)

1. Проехав по одному участку шоссе, любые две встречные машины встретятся, а попутные – только если одна успеет обогнать другую. Например, последняя заехавшая на участок машина вряд ли догонит первую, так как большинство машин имеют примерно равные скорости и потому не обгоняют друг друга. Значит, даже если Катя насчитала больше встречных машин, всего попутных могло быть и больше, просто она их не видела.

2. а) За каждый оборот колеса телега сдвигалась вперед на 4 м (4 стороны квадрата). Значит, за 8 оборотов она проехала $8 \times 4 = 32$ м.

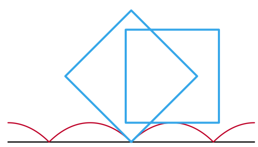
б) Лучше всего, конечно, подошли бы восьмиугольные колёса (при условии, что их форма близка к форме правильного восьмиугольника) – чем ближе форма колеса к кругу, тем лучше.

Чтобы провернуть квадратное колесо с одной стороны квадрата на другую, приходится поднять его центр тяжести на столько, на сколько половина диагонали квадрата длиннее половины его стороны. То есть фактически приходится приподнимать колесо (а вместе с ним и телегу).



в) Форма рельсов выбирается так, чтобы центр тяжести квадрата (то есть просто его центр) находился всё время на одной и той же высоте. Тогда не придётся приподнимать телегу. Кстати, при качении квадрата по таким рельсам его центр в каждый момент находится ровно над точкой, касающейся рельсов – так же, как и у круглого колеса на ровной поверхности (но не так же, как, например, при качении круглого колеса по кривым рельсам).

Поэтому разница высоты между верхней и нижней точками рельса равна разнице между половиной диагонали квадрата и половиной его стороны, то есть $\frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$, где a – сторона квадрата.



3. Это был трактор. Переднее колесо у него в 2 раза меньше и поэтому на одном и том же участке пути оно делает в 2 раза больше оборотов (если на земле лежит нитка, которая на большое колесо намотается за 1 оборот, то на маленькое колесо она намотается за 2 оборота).

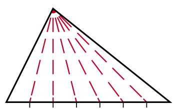
У легковой машины так тоже бывает, когда она на малой скорости делает резкий поворот (например, когда паркуется). Какое-то мгновение задние колёса почти стоят, а передние едут «вбок» почти по кругу.

4. Расстояние между рельсами в Польше (и западнее) меньше, чем в Беларуси и России; поэтому наши колёсные пары для их дорог не годятся, и наоборот.

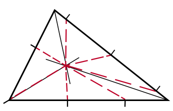
НЕ РОЙ ДРУГОМУ ЯМУ («Квантик» № 5, 2017)

◆ Вова просто переклеил все квадратики так, чтобы каждая грань кубика была одного цвета.

◆ Лиза предложила разметить линейкой одну из сторон на равные части и резать из противолежащего угла через эти метки. Получаются треугольники, у которых одинаковые основания и общая высота. Площади этих треугольников тоже одинаковые.



◆ Во второй раз Лиза посоветовала найти точку пересечения биссектрис углов торта и разделить периметр торта на равные части. Резать торт надо из точки пересечения биссектрис по новым меткам. Каждому достанется один или два треугольника с одинаковыми высотами и равными суммами оснований.



ПОЛЬСКИЕ МОНЕТЫ («Квантик» № 5, 2017)

1. 1 рубль $= 6\frac{2}{3}$ злотых. **2.** 100. **3.** 30. **4.** 96.

5. Золото в 15 раз дороже серебра.

6. 22 рубля 75 копеек (точнее, $22\frac{34}{45}$ рубля).

Решения. **1.** 20 злотых = 3 рубля.

2. 2 злотых = 30 копеек, а 20 злотых = 3 рубля.

3. 25 копеек = 50 грошей, а 30 копеек = 2 злотых, откуда 300 грошей = 150 копеек = 10 злотых.

4. 25 копеек = 1 золотник $5\frac{1}{4}$ доли, а 30 копеек = 1 золотник $25\frac{1}{2}$ доли. Отсюда 5 копеек $= 20\frac{1}{4}$ доли, 25 копеек $= 5 \cdot 20\frac{1}{4} = 101\frac{1}{4}$ доли, а 1 золотник $= 101\frac{1}{4} - 5\frac{1}{4} = 96$ долей.

5. $\frac{3}{4}$ рубля серебром = 3 золотника и $15\frac{3}{4}$ доли $= 303\frac{3}{4}$ доли, откуда 3 рубля серебром = 1215 долей. А 3 рубля золотом = 81 доля $= \frac{1215}{15}$ доли.

6. Рубль серебром = 405 долей, а фунт $= 96 \times 96 = 9216$ долей.

ДИЛЬЯЖ («Квантик» № 5, 2017)

В прошлом номере в решении задачи про дильяж мы обсудили, что если зеркала скреплены под углом 60°, Квантик увидит своё отражение точно таким же, какое бы оно было в обычном плоском зеркале, плоскость которого перпендикулярна стержню дильяжа. Поэтому если вращать дильяж вокруг стержня, отражение не будет меняться. Если же зеркала стыкуются под углом 90°, отражение получится таким, как будто Квантика повернули на 180° вокруг ребра, по которому стыкуются зеркала. Если вращать дильяж вокруг его стержня, то ребро стыковки будет вращаться, а значит, отражение тоже, причём отражение будет поворачиваться на вдвое больший угол, чем поворачивается дильяж (подумайте, почему).

ПОВОРОТ КВАДРАТА

На некоторых рисунках штриховая линия позволяет увидеть квадрат, помогающий решить задачу.

1.

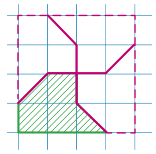


Рис. 1

2.

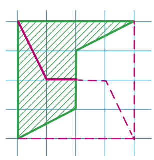


Рис. 2

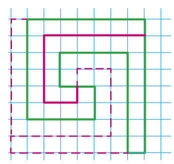


Рис. 3

3.

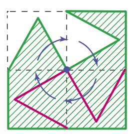


Рис. 4

4. См. рис. 3

5. Существует.

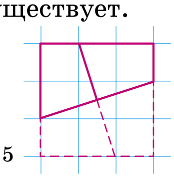


Рис. 5

6. Можно.

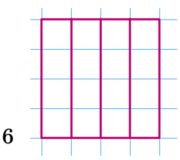


Рис. 6

LXXXIII САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ. ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ II ТУРА.

1. Если бы среди чисел на доске нашлось 4 нечётных числа, их произведение было бы нечётным и не делилось на 30. Значит, на доске выписано не более трёх нечётных чисел. Аналогично на доске выписано не больше трёх чисел, не делящихся на 3, а также не больше трёх чисел, не делящихся на 5.

В предыдущем рассуждении упомянуто не более 9 чисел, выписанных на доске. Следовательно, на доске есть как минимум ещё одно число, и оно должно делиться и на 2, и на 3, и на 5, а значит, и на 30.

2. Маляры перекрашивают клетки «противоположными» способами: если второй маляр пришёл на клетку после первого, то, перекрасив её, он отменил последнее перекрашивание первого маляра.

С учётом этого наблюдения стратегия второго маляра тривиальна: сначала он кратчайшим путём (например, вдоль сторон доски) идёт на стартовую клетку первого маляра. На это ему потребуется 15 ходов – назовём эти ходы стартовыми. За это время соперник тоже сделает 15 ходов, следовательно, в сумме будет «испорчено» не более 30 клеток (то есть не более 30 клеток на доске будут не серыми). После этого второй маляр должен совершать в точности те же ходы, которые делал первый маляр 15 ходов тому назад.

На 16-м ходу первый маляр, возможно, испортит ещё одну, 31-ю клетку, а второй маляр отменит 1-й ход первого маляра, и снова будет испорчено не более 30 клеток. На 17-м ходу второй маляр отменит 2-й ход первого, на 18-м – 3-й, и так далее. Таким образом, в каждый момент времени мы можем считать, что первый маляр совершил только 15 или 16 своих последних ходов, а второй – 15 первых.

В результате таких действий второго маляра в каждый момент на доске будет не более 31 не серой клетки, и значит, не менее $8 \cdot 9 - 31 = 41$ серой клетки.

Осталось заметить, что первый маляр не мог помешать второму совершать ходы. Действительно, представим себе шахматную раскраску доски. Изначально маляры стоят на клетках разного цвета, после хода первого маляра они окажутся на клетках одного цвета, и поэтому в момент хода второго маляра первый находится не на соседней по стороне клетке. После хода второго маляры снова окажутся на клетках разного цвета и ситуация повторится.

3. Ответ: 2017-е число меньше 83-го.

Объединим числа в пары по порядку следования, первое со вторым, 3-е с 4-м и так далее. Изобразим их на числовой прямой.

Мы утверждаем, что все числа, начиная с 3-го, лежат внутри отрезка, образованного первой парой. Действительно, если это неверно, то мы можем взять первое число, не лежащее внутри первой пары чисел. Тогда, когда его выписывал Серёжа, с одной стороны от него было ноль чисел, а с другой – хотя бы два, противоречие.

А раз все числа лежат внутри первой пары, мы можем её стереть, и условие будет выполняться для каждого из последующих чисел.

Рассуждая аналогично, получаем, что все числа, начиная с 5-го, лежат внутри пары из 3-го и 4-го чисел, все числа начиная с 7-го – внутри пары 5-го и 6-го, и так далее. То есть каждое число лежит внутри всех предыдущих пар.

Назовём каждое число левым или правым в зависимости от того, лежит оно слева или справа от парного ему. Тогда каждое число больше всех предыдущих левых чисел и меньше правых.

Поскольку 219-е число больше 84-го, 84-е является левым. А значит, парное ему, 83-е, – правое, и оно больше, чем 2017-е.

4. Достаточно проверить выполнение неравенств треугольника. Пусть F – точка пересечения отрезков BE и CD. Тогда $BE+DC>BF+FC>BC$.

Проверим неравенство $BE+BC>CD$. Для этого прибавим к обеим его частям равные отрезки AE и AD, то есть проверим, что $AE+BE+BC>AD+CD$. Действительно, по неравенству треугольника $AE+BE>AB$ и $BD+BC>CD$; кроме того, $AB=AD+BD$. Значит, $AE+BE+BC>AB+BC=AD+BD+BC>AD+CD$.

Аналогично доказывается третье неравенство треугольника $CD+BC>BE$.

5. Ответ: выигрывает Вася.

Задача содержит секрет: можно считать, что Петя и Вася играют не с клетчатой полоской, а с ожерельем из 99 бусин. Да, они закрашивают бусинки! Более того, будем считать, что ожерелье имеет застёжку. Давайте «уравняем в правах» застёжку и бусинки, а именно, постановим, что застёжка – это тоже бусинка, причём исключительный ход с закрашиванием одной крайней клетки будем интерпретировать как ход, при котором закрашивается соответствующая крайняя бусинка, *а также* застёжка! При таком взгляде правила игры становятся совершенно симметричными и простыми: есть ожерелье из 100 бусин, игроки по очереди закрашивают пары соседних бусин. Каждую бусинку можно закрашивать не более одного раза, проигрывает тот, кто не может сделать ход. В такой игре выигрывает второй игрок: он должен пользоваться симметричной стратегией (каждым ходом закрашивать диаметрально противоположную пару бусин).

НАШ КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем
заочном математическом конкурсе.

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, не позднее 1 июля электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com** или обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик»**.

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

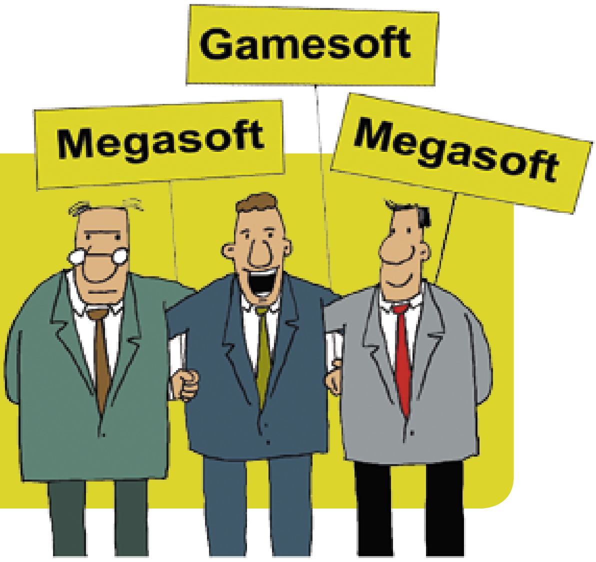
В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте www.kvantik.com. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы.

Желаем успеха!

X ТУР

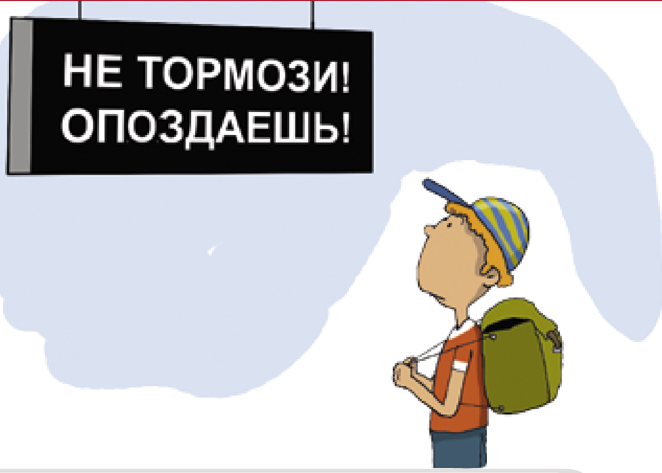
46. На конференции присутствовали представители двух конкурирующих фирм «Megasoft» и «Gamesoft» Алекс, Бен и Карл. Представители одной и той же компании всегда говорят правду друг другу и врут конкурентам. Алекс сказал Бену: «Карл из Megasoft». Бен ответил: «Я тоже». Где работает Алекс?



47. У двух игроков есть кубическая картонная коробка, в которой лежит приз. Они по очереди выбирают одно из рёбер коробки и разрезают коробку вдоль этого ребра. Выигрывает тот, после чьего хода можно открыть коробку и достать приз. Кто может обеспечить себе победу – начинающий или второй игрок? Коробка открывается, если она разрезана вдоль трёх рёбер одной грани.

Авторы: Михаил Евдокимов (46 – 48), Александр Романов (49), Валерий Сендеров и Борис Каневский (50)

48. Костя приехал в аэропорт, посмотрел на электронное табло, которое показывает время (часы и минуты), и заметил, что на табло горят четыре различные цифры. Когда он посмотрел на табло в следующий раз, там горели четыре другие различные цифры. Какое наименьшее время могло пройти между двумя этими моментами?



49. Метроморфы могут менять свой рост. Двадцать пять метроморфов стали в одну шеренгу, рост каждого – целое число сантиметров. В конце каждой минуты все метроморфы, слева и справа от которых более низкие, чем они, уменьшают свой рост на 1 см, а те, слева и справа от которых более высокие, увеличивают свой рост на 1 см. Остальные, в том числе и стоящие по краям шеренги, не меняют роста.

а) Докажите, что через несколько минут все метроморфы перестанут менять свой рост.

б) Верно ли это утверждение, если метроморфы уменьшают и увеличивают свой рост на 2 см?

50. а) Дан клетчатый квадрат 15×15. Можно ли закрасить 15 клеток так, чтобы любой прямоугольник 3×5 со сторонами, параллельными сторонам квадрата, составленный из клеток, содержал хоть одну закрашенную клетку?

б) А можно ли так закрасить всего 14 клеток?

Художник Николай Крутиков

МОХ НА ДЕРЕВЬЯХ

Какой общей особенностью отличается расположение мха на этих деревьях? Какая этому может быть причина?

Автор Александр Бердников
Художник Мария Усеинова

ISSN 2227-7986