Игорь Акулич

Часы на льду

Окончание. Начало в № 7

«Четверо правильно идущих часов лежат на столе циферблатами вверх так, что их центры являются вершинами квадрата. В некий момент концы минутных стрелок часов оказались вершинами квадрата. Докажите, что и в любой другой момент времени четырёхугольник с вершинами в концах минутных стрелок является квадратом. Толщиной часов пренебречь»[2].

– А часы одинаковые?

– Не обязательно.

– То есть и длины стрелок могут различаться? Ничего себе! Даже не знаю, как подступиться.

– Твоё счастье, что я знаю. Могу подсказать, откуда начинать.

– Давай.

– Вот вспомогательная теорема – как принято говорить, *лемма*. Возьмём квадрат с вершинами, обозначенными по часовой стрелке $ABCD$. Перенесём эти вершины в точки A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно таким образом, что все векторы AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 равны по длине, причём каждый последующий повёрнут на 90° *тоже по часовой стрелке* по отношению к предыдущему. Утверждается, что тогда $A_1B_1C_1D_1$ – тоже квадрат. Сумеешь доказать?

– Подожди, дай-ка сначала нарисую (рис.4). А, так это ж очевидно!

– Ну, не то чтобы совсем очевидно, но доказать несложно. Проще всего отметить центр O квадрата $ABCD$, а потом убедиться, что точки A_1, B_1, C_1 и D_1 находятся на равных расстояниях от этого центра, и углы A_1OB_1, B_1OC_1, C_1OD_1 и D_1OA_1 – прямые.

– Ладно, проехали. Это и впрямь легко. Но дальше-то что?

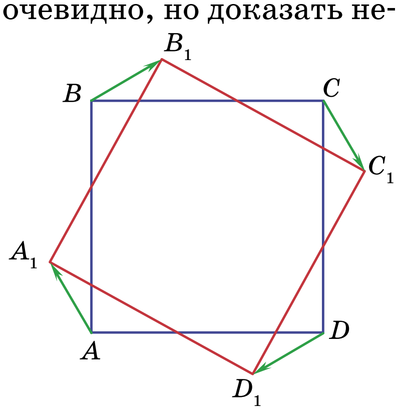
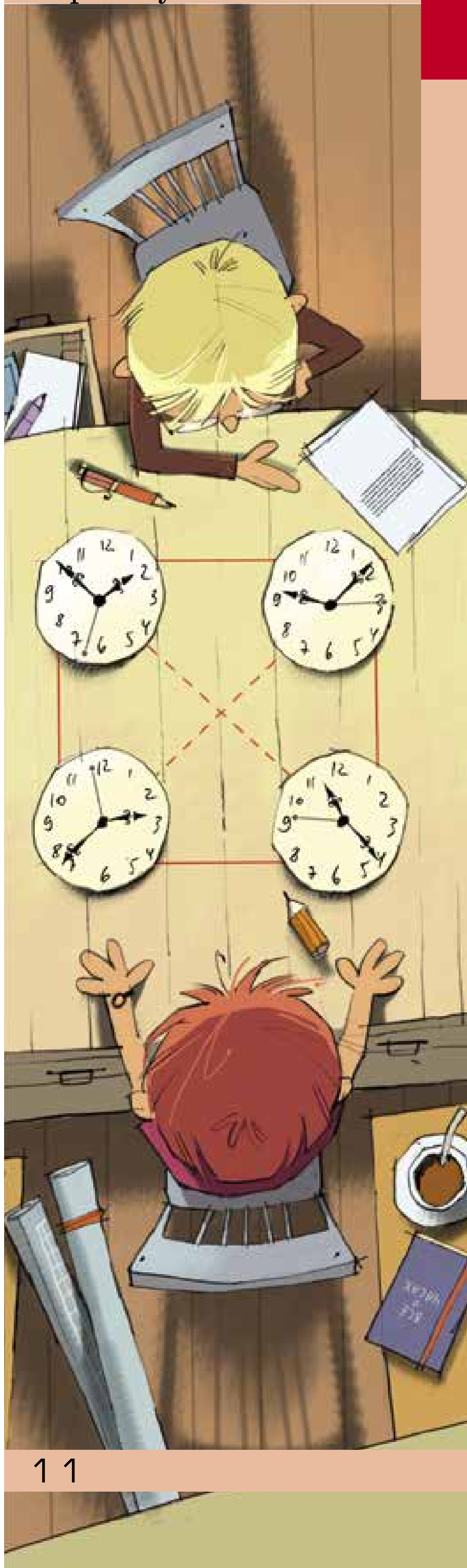
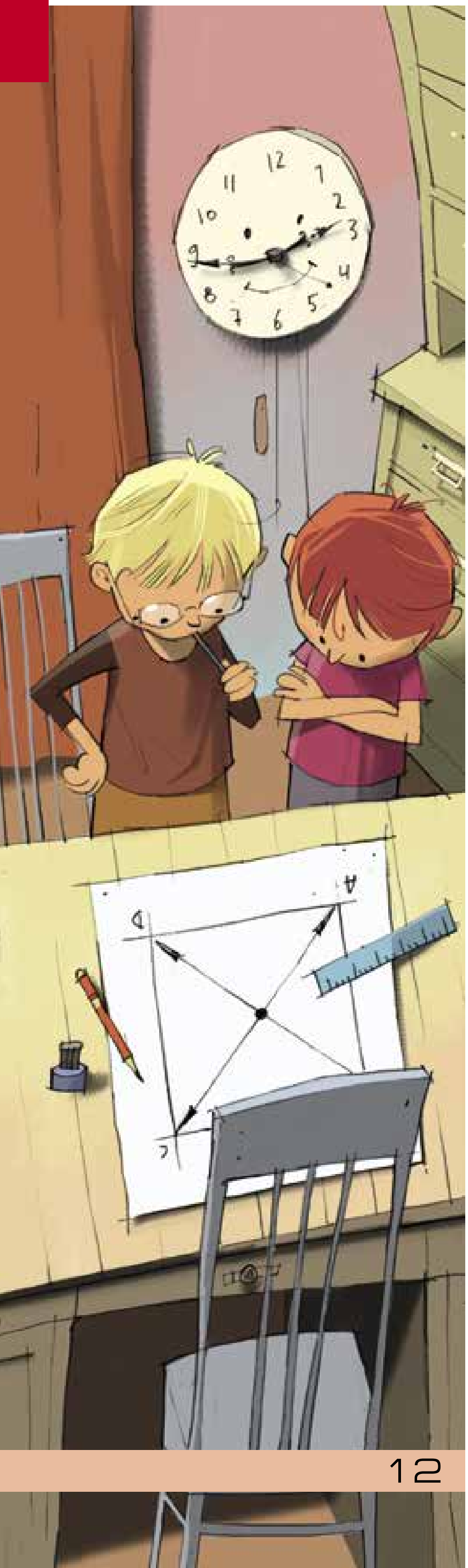


Рис. 4



[2] XIII Всероссийская олимпиада школьников по математике, 1987 г., 10 класс. Автор неизвестен.



– А теперь давай так. Центры часов, по условию, всегда лежат в вершинах квадрата. Обозначим их (по часовой стрелке) $A_0B_0C_0D_0$ (рис. 5). Пусть концы минутных стрелок в какой-то момент являются вершинами квадрата $ABCD$ (естественно, тоже по часовой стрелке, на рис. 5 изображён красным). Теперь аккуратно перенесём все часы (не поворачивая их[3]) так, чтобы их центры совпали с центром O квадрата $A_0B_0C_0D_0$. Концы стрелок при этом тоже перенесутся, но как? Давай нарисуем квадрат $A_0B_0C_0D_0$ и проведём векторы от вершин к его центру O (рис. 6). Смотри: каждый «последующий» вектор переноса равен по величине и повёрнут на 90° по отношению к «предыдущему».

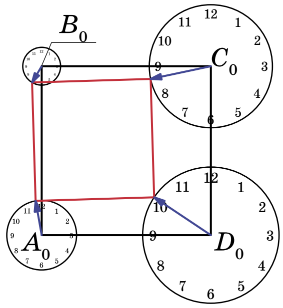


Рис. 5

– Вижу.

– Значит, после переноса, по лемме, концы стрелок останутся вершинами квадрата (рис. 7)! А далее все «перенесённые» часы идут себе и идут, и их минутные стрелки вращаются с одинаковой угловой скоростью. Поскольку они синхронно вращаются, то и квадрат, образованный их концами, останется квадратом, что мы и видим на рисунке 7. Он целиком будет поворачиваться вокруг точки O со скоростью один оборот в час. А теперь возьмём *произвольный* момент времени и проделаем обратную операцию: перенесём центры всех часов обратно в вершины квадрата. Здесь уже каждый вектор переноса сменится на противоположный, но – обрати внимание! – по-прежнему каждый «последующий» вектор равен по величине и повёрнут на 90° по отношению к «предыдущему» (рис. 8). Значит, по той же лемме, концы стрелок опять

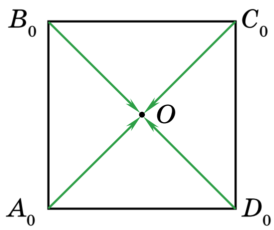


Рис. 6

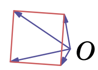


Рис. 7

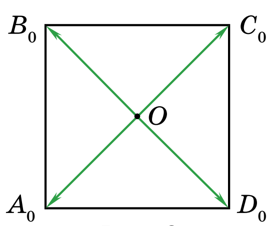
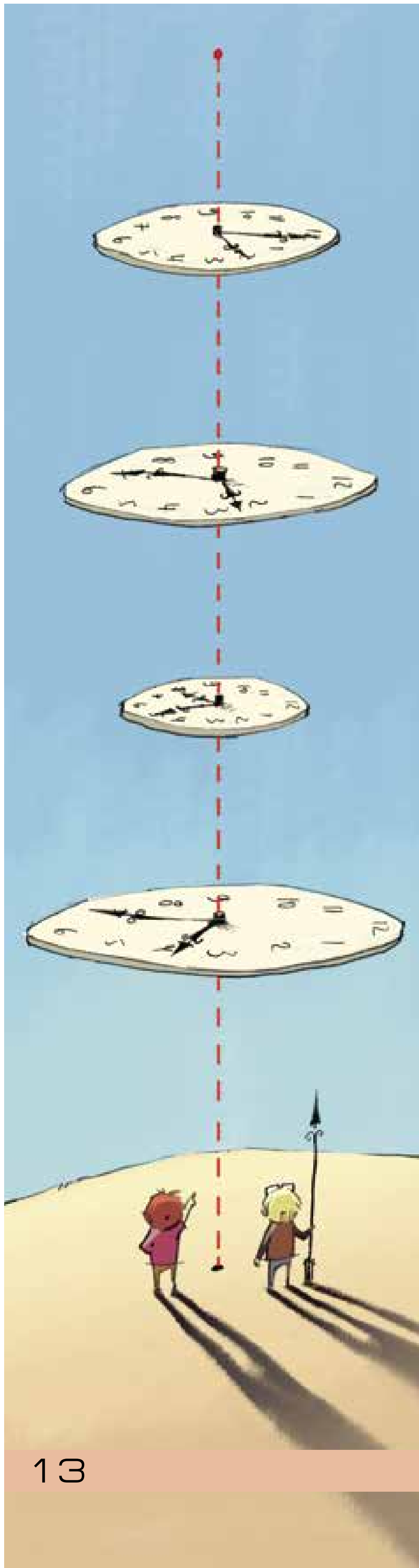


Рис. 8

[3] По-научному это называется *параллельный перенос*.



будут вершинами квадрата. Но это и есть их положение в тот самый произвольный момент времени. Вот и всё!

– Да, задача красивая, но... скажи-ка мне, что означает в условии **«Толщиной часов пренебречь»**?

– Это как раз говорит о том, что толщины всех часов очень и очень малы – практически нулевые. Поэтому мы можем считать их идеально плоскими. Опять же – нет проблем с переносом всех часов в центр квадрата (их пришлось при этом сложить «в стопочку», высотой которой мы тоже пренебрегаем).

– Ах, так? Но тогда часы могут в исходном положении «перекрываться», то есть налегать друг на друга – в условии на это запрета нет!

– Могут... Ну и что?

– А то, что тогда утверждение, которое ты мне тут с блеском доказал, является *неверным*!

– Почему это?

– А вот тебе пример[4]. Возьмём тот же квадрат $A_0B_0C_0D_0$, в вершинах которого находятся центры часов. Концы минутных стрелок в некоторый момент обозначим теми же буквами A, B, C и D. Пусть радиусы часов с центрами в точках A_0 и C_0 очень велики – настолько, что одни из этих часов «накладываются» на другие. При этом стрелка A_0A направлена строго на точку C_0 и почти её достигает, не доходя до неё на какую-то очень малую величину x, намного меньшую стороны квадрата $A_0B_0C_0D_0$. Та же история и со стрелкой C_0C – она почти дотягивается до точки A_0. Стрелки же B_0B и D_0D наоборот, очень короткие, тоже направлены встречно, и длины их обеих равны той же малой величине x. Вот я на рисунке 9 всё это изобразил. Даже специально, чтобы тебе понятней было, стрелки A_0A и C_0C сделал разного цвета и разной толщины. Ты ведь не станешь возражать, что концы стрелок образуют квадрат?

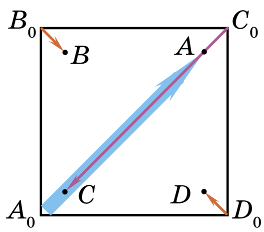


Рис. 9

– Не стану.

– Вот! А теперь посмотри, что будет через полчаса. Каждая стрелка повернётся на 180°. Получится рисунок 10. Здесь-то $ABCD$ – уж явно не квадрат!

[4] Такой опровергающий пример принято называть *контрпримером*.

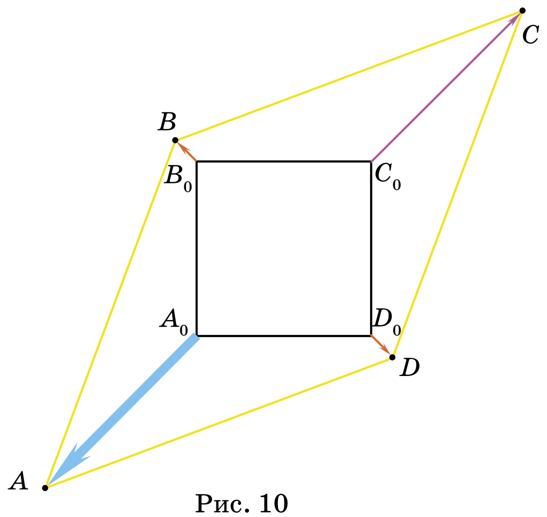


Рис. 10

– И правда. Вытянутый ромб какой-то... Но *почему*?!

– Очень просто. В квадрате $ABCD$ на рисунке 9 вершины следуют *против часовой стрелки*, поэтому твою распрекрасную лемму применить здесь нельзя!

– Она не моя...

– Неважно. Главное – олимпиадная задача, получается, была с ошибкой. И через столько лет она вскрылась! Видишь – всё тайное становится явным.

– А может, автор имел в виду, что часы не должны перекрываться?

– Может. Но это надо было указывать в условии! И тогда при решении необходимо дополнительно доказать, что при этом вершины квадрата, образованного концами стрелок, следуют в том же направлении обхода, что и вершины квадрата, в котором находятся центры часов. А как это сделать?

– Ну... например, указать в условии, что длины стрелок не превосходят половины стороны квадрата. Тогда никакие наложения стрелок будут невозможны.

– Верно! Или лучше так: диаметры часов не превосходят стороны квадрата. Так что когда в следующий раз ко мне с задачами сунешься – сперва проверь корректность условия и правильность решения. А то все усилия пропадут впустую.

– Признаю. Согласен. Исправлюсь.

Художник Алексей Вайнер