XXIII турнир математических боёв имени А.П. Савина

Материал подготовил
Александр Блинков

Ежегодно в конце июня школьники из многих городов съезжаются на летний турнир имени А. П. Савина. Мы приводим подборку избранных задач турнира 2017 года. После номера задачи указаны её автор и классы, для которых она предлагалась.

Избранные задачи

1. (*Е. Бакаев*, *Н. Чернятьев*, 6–7) Петя записал несколько различных натуральных чисел с суммой 100, используя только две различные цифры. Какое наибольшее количество чисел мог записать Петя?

2. (*А. Шаповалов*, 7–8)

а) Тридцать принцесс сидят по пятеро вокруг шести круглых столов, и у каждой пары соседок платья разного цвета. Всегда ли их можно рассадить по трое вокруг десяти круглых столиков так, чтобы по-прежнему у каждой пары соседок были платья разного цвета?

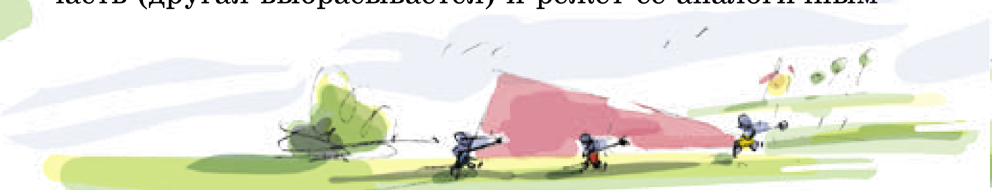
б) Двадцать принцесс сидят по пятеро вокруг четырёх круглых столов, и у каждой пары соседок платья разного цвета. Докажите, что их можно пересадить за пять круглых столов по четверо так, чтобы по-прежнему у каждой пары соседок были платья разного цвета.

3. (*Е. Бакаев*, 7–8) В стране между некоторыми городами осуществляются беспосадочные перелёты (рейсы односторонние). Авиакомпания хочет установить цены на полёты так, чтобы если от одного города до другого можно было долететь (с пересадками) несколькими способами, то все способы обходились бы путешественнику в одинаковую сумму. Всегда ли получится это сделать, если стоимость перелётов может быть любой отличной от нуля, в том числе и отрицательной?

4. (*Е. Бакаев*, *А. Шаповалов*, 7–8) Клетчатый многоугольник, клетки которого раскрашены в белый и чёрный цвета, назовём *хорошим*, если в нём ровно четверть чёрных клеток. Любой ли хороший квадрат со стороной 12 можно разрезать на 9 хороших многоугольников?

5. (*А. Шаповалов*, 6) Каждая грань кубика размером $2\times2\times2$ разбита на четыре квадрата 1×1. Какое наибольшее количество квадратов можно закрасить так, чтобы они не соприкасались даже углами?

6. (*Я. Дрокин*, 6) Петя и Вася играют с клетчатым квадратом 2017×2017 по таким правилам: сначала Петя делит квадрат по линии сетки одним прямолинейным разрезом на две части, потом Вася выбирает из них одну часть (другая выбрасывается) и режет её аналогичным



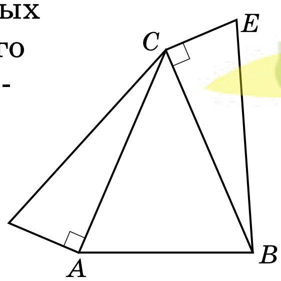
образом на две части, затем Петя из этих частей выбирает одну и режет, и т.д. Тот, кто не сможет сделать очередной ход, проигрывает. Кто из них сможет выиграть, независимо от того как будет играть соперник?

7. (*А.Шаповалов*, 6) По кругу лежат 4 камня. Известно, что вес одного из них равен сумме весов двух его соседей. Можно ли найти этот камень за два взвешивания на чашечных весах без гирь?

8. (*Е.Бакаев*, 6–7) Стороны многоугольника идут по линиям клетчатой сетки, причём длина одной стороны равна 5, а другой – 6. Назовём вершину *разносторонней*, если в ней сходятся стороны разных длин. Какое наименьшее количество разносторонних вершин может быть в этом многоугольнике?

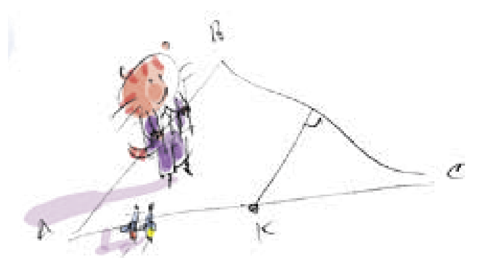
9. (*Е.Бакаев*, 6–7) Шестиугольник, все стороны которого разной длины, разрезали на равные треугольники. Какое наименьшее количество треугольников могло получиться?

10. (*А.Пешнин*, 7–8) На боковых сторонах AC и BC равнобедренного треугольника ABC как на катетах построены вовне равные прямоугольные треугольники ADC и CEB (см. рисунок). Докажите, что из отрезков BD, AE и BC можно сложить треугольник.

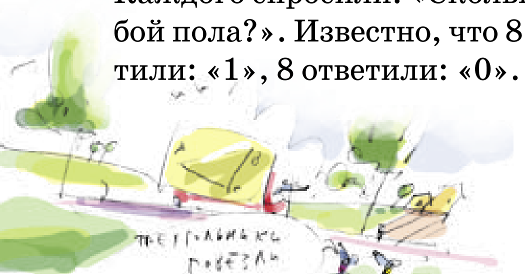


11. (*Е.Бакаев*, 7–8) В треугольнике ABC угол B равен 120°, точка M – середина стороны AC. На лучах AB и CB отмечены точки K и L соответственно так, что $AK=CL$ и $\angle KML=120°$. Докажите, что $KL=AM$.

12. (*Е.Бакаев*, 7–8) В равнобедренном треугольнике ABC на основании AC отмечена точка K так, что $CK=AB$. К стороне BC проведён перпендикуляр KE, который разделил ABC на треугольник и четырёхугольник. У кого из них периметр больше?



13. (*А.Шаповалов*, 7–8) По кругу стоят 25 детей. Каждого спросили: «Сколько твоих соседей одного с тобой пола?». Известно, что 8 детей ответили: «2», 8 ответили: «1», 8 ответили: «0». Что ответил 25-й ребёнок?



Художник Сергей Чуб