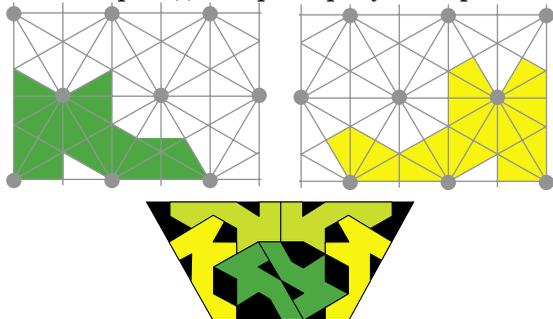


ПОПРАВКА

В статье «Башмаки в корзине» из «Квантика» № 10, 2017, две пары башмаков нарисованы с ошибкой (некоторые части башмаков не дорисованы). В результате головоломка упрощается и имеет не единственное решение. Приносим изменения и приводим верные рисунки и решение.

**■ НАШ КОНКУРС («Квантик» № 10, 2017)**

6. Пятачок и Винни-Пух вышли из дома Пятачка и пошли купаться на озеро, двигаясь с одной и той же скоростью. Через 15 минут, на полпути от дома до озера, Пятачок обнаружил, что забыл плавки, и побежал с вдвое большей скоростью домой и обратно к озеру, нигде не задерживаясь по дороге. Насколько позже Винни-Пуха Пятачок оказался на озере?

Ответ: 7,5 минут. Через 15 минут после того, как Пятачок обнаружил, что плавков нет, Пух как раз дойдёт до озера, а Пятачок, бегущий вдвое быстрее, снова окажется на полпути к озеру. Значит, ему останется 7,5 минут до озера.

7. Чему равняется сумма $ТБПР + ПБПР$, если известно, что $ТБПР + ПБПР = 8 \times ДБПР$? (Найдите все ответы и докажите, что других нет. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными – разные, и ни одно число не начинается с нуля.)

Ответ: Поскольку $БПР \times 2$ и $БПР \times 8$ должны кончатся одними и теми же двумя цифрами, $БПР \times (8 - 2) = БПР \times 6$ кончается двумя нулями (делится на 100), а это возможно только при $БПР = 50$. Тогда $ТБПР + ПБПР$ не больше $950 + 850 = 1800$, а $ДБПР$ не больше $1800 : 8 = 225$. Значит, $Д = 1$, а $ТБПР + ПБПР = 8 \times ДБПР = 8 \times 150 = 1200$. Это действительно возможно, если $Т$ и $П$ равны (в любом порядке) 9 и 2, 8 и 3 или 7 и 4.

8. Провожая трёх своих внуков к родителям, бабушка дала им в дорогу три пирога: с картошкой, с вареньем и с грибами. В поезде пироги были съедены, причём каждый пирог ели двое внуков. При этом тому из внуков,

который терпеть не может пирогов с картошкой, не досталось и пирога с грибами. Сашенька не ел пирога с вареньем. Кто какие пироги ел, если Вовочка участвовал в поедании большего числа пирогов, чем Петенька?

Ответ: Вовочка ел все пироги, Сашенька – с грибами и с картошкой, Петенька – с вареньем.

Для каждого пирога его не ел ровно один из внуков. Для пирога с вареньем это Сашенька, для пирогов с картошкой и грибами – один и тот же внук. Если это Сашенька или Вовочка, то Петенька участвовал в поедании всех трёх пирогов, то есть не меньшего их числа, чем Вовочка. Противоречие. Значит, не ел пирогов с картошкой и грибами именно Петенька.

9. Известно, что несколько небольших тяжёлых ящиков можно увезти на семи 6-тонных грузовиках, но нельзя увезти на меньшем количестве таких грузовиков. Докажите, что этот груз не удастся увезти а) на трёх 7-тонных грузовиках; б) на трёх 9-тонных грузовиках.

Решим сразу п. б). Пусть груз можно увезти на трёх 9-тонных грузовиках. Покажем, как из каждого 9-тонного грузовика переложить все ящики в два 6-тонных – получим противоречие.

Так как ящики можно увезти на семи 6-тонных грузовиках, то каждый ящик весит не более 6 тонн. Будем перемещать по очереди ящики с 9-тонного грузовика в 6-тонный, беря каждый раз самый тяжёлый ящик, пока либо они не кончатся, либо 6-тонный грузовик не загрузится хотя бы наполовину. Это удастся сделать, потому что первый ящик поместится, а вес каждого следующего ящика меньше, чем суммарный вес уже лежащего груза в 6-тонном грузовике.

Если ящики в 9-тонном остались, то переложим их все во второй 6-тонный грузовик.

10. Три прямые дорожки парка образуют треугольник. В парке три входа – они расположены в середине дорожек, а в каждой вершине расположен фонарь. От каждого из входов нашли кратчайшее расстояние до наиболее удалённого фонаря, если идти по дорожкам. Оказалось, что два из трёх полученных чисел равны. Обязательно ли тогда длины каких-то двух дорожек равны?

Ответ: нет. Если стороны треугольника равны 3, 4 и 5, то получатся числа $5\frac{1}{2}$, 5 и $5\frac{1}{2}$.

■ ЖЕЛЕЗНАЯ ДОРОГА («Квантик» № 11, 2017)

1. «Поют колёса – тра-та-та» – название рассказа Виктора Драгунского. На самом деле они

поют «тата-тата́ (пауза), тата́-тата́ (пауза)...» Это колёса стучаются о стыки рельсов.

Рельсы положены не вплотную друг к другу, а так, что между их концами (стыками) остаётся пустое место (зазор) 2–3 см. Каждое колесо, проехав зазор, ударяется о край следующего рельса – получается звук «та». Но у железнодорожного вагона с каждой стороны по два колеса один за другим – отсюда «тата». И, наконец, за «задними» колёсами одного вагона после маленького перерыва стык проезжают передние колёса следующего вагона – поэтому «тата» удваивается. Потом пауза – колёса едут к следующему стыку.

Если вы стоите снаружи от поезда, в паузе чётко слышно похожее на эхо более тихое «тата-тата» от следующего стыка. Длина вагона почти равна длине рельса, поэтому время между громким «тата-тата» и «эхом» маленькое. Сидя внутри поезда близко к середине вагона, можно слышать два набора «тата-тата» почти одинаковой громкости – от стыка впереди и стыка сзади. Стук более далёких колёс сливается в гул.

Зачем нужны зазоры? С повышением температуры металлы (как и почти все тела) расширяются. В жару рельс «разбухает», удлиняется – и тем сильнее, чем он длиннее сам по себе. Зазоры между стыками уменьшаются, но рельсы не наезжают друг на друга и не перекашиваются.

2. По темпу «песни»: чем быстрее идёт поезд, тем в более быстром темпе поют колёса. Нужно измерить продолжительность «такта» – «тата-тата (пауза)». Чтобы получилось точнее, можно отсчитать, например, 10 тактов (и измеренное время поделить на 10). Это будет время, в течение которого вагон проезжает один рельс. Длина рельса 25 м, поделив её на время «такта», узнаем скорость поезда.

Заметим, что этот способ годится не везде. На некоторых участках железных дорог сделаны бесстыковые пути – по несколько рельсов сваривают в длинные «плети» 300–350 м длиной или даже больше. Такие длинные рельсы меньше изнашиваются от ударов колёс, и поезд по ним идёт тише, но зато для них требуется гораздо более тщательная подготовка полотна (щебня, шпал), и за ними нужно внимательно следить в очень жаркую или холодную погоду.

3. Электровоз работает от проводов, по которым идёт ток – так же, как и трамвай. Поэтому сверху у электровоза «усы» – токосниматели. У электричек «усы» есть не только у первого ва-

гона, а у нескольких по всему поезду. А тепловоз и паровоз работают автономно, сами по себе, но топливо, которое они используют для своих двигателей – разное. У тепловоза двигатель как у машины, точнее, как у грузовиков или автобусов – работает на дизельном топливе: газы, образующиеся при сгорании топлива, расширяются и двигают поршни, а они заставляют вращаться колёса тепловоза. У паровоза же поршни двигают просто нагретый водяной пар, а нагревается вода в обычной печке, которую топят углём. Угля надо много, поэтому у паровоза обычно сзади есть специальный дополнительный вагон – «вторые полпаровоза», называется тендер. В нём хранятся запасы угля для печки и воды для котла. Дым из паровозной трубы – густой и тёмный, с кусочками сажи, а из трубы тепловоза – маленький светлый дымок, хотя тоже не бесполезный: в нём – продукты сгорания бензина. А у электровозов ни дыма, ни трубы нет вообще.

Локомотив метро – тоже электровоз, но без «усов» сверху, потому что контактный провод проходит в метро не сверху, а сбоку; на станциях – под платформой. Поэтому, если кто-то упал на рельсы метро, ток в проводе отключают, и все поезда на линии останавливаются.



Тепловоз



Паровоз с тендером



Электровоз

4. Подсказка – в рисунке поворачивающей колёсной пары: профиль железнодорожного колеса (то есть вид его сбоку) – имеет довольно сложную форму, колесо шире (имеет больший радиус) у внутреннего края и уже – у внешнего. На закруглённом участке пути колёсная пара чуть на-



клоняется: «внутреннее» колесо оказывается ниже и опирается на рельс своим внешним, более узким краем, а внешнее колесо – наоборот, более широким внутренним краем. Из-за этого радиусы колёс на повороте разные. Чтобы колёса не соскочили с рельса, по внутреннему краю каждого колеса проходит совсем широкий ограничитель – реборда. Подробное описание и анимацию, как поворачивает поезд, см. на сайте «Математические этюды», www.etudes.ru/ru/etudes/train-wheelset



■ **РУКИ-КРЮКИ** («Квантик» № 11, 2017)

Рычаг 2-го рода в руке просто не разместить. Например, в случае с предплечьем получилось бы, что груз должен размещаться где-то посредине кости (так мы делаем, например, когда несём охапку дров), а усилие – прилагаться в районе кисти. Но к чему будет крепиться мышца, тянущая кисть? К плечам, натягиваясь, словно перепонка в крыле птеродактиля? А куда – остальные мышцы? Нет, все плечи рычагов и все мышцы, ими управляющие, должны помещаться внутри компактной конечности. Однако, если не ограничиваться конечностями, в нашем организме всё же можно найти рычаг 2-го рода: в его роли выступает нижняя челюсть, смыкаемая жевательной мышцей, когда мы разгрызаем что-то особенно твёрдое задними зубами.

Чтобы сделать дающий большой выигрыш в силе рычаг 1-го рода, надо снабдить кость добавочным длинным плечом, торчащим назад. Оно тоже будет за всё цепляться, и, чтобы дотянуть мышцы до его конца, опять придётся натягивать сухожилие в обширной перепонке.



По правде говоря, в нашем теле есть рычаги 1-го рода: это, например, локтевая кость вместе с прикрепляющейся к ней трёхглавой мышцей плеча (трицепсом). Посмотрите на свой локоть: локтевой отросток (собственно «локоть») торчит назад от места соединения костей в суставе, и мышца крепится как раз к этому отростку. Но «силовое» плечо этого рычага намного меньше «грузового», то есть и здесь мы не выигрываем в силе, а проигрываем: затрачиваем большое усилие, получая на выходе маленькое.

Но если мышца мощная и способна провернуть рычаг даже в невыгодном положении,

проигрыш в силе оборачивается выигрышем в скорости: пока короткое плечо сместится на 1 см, длинное «пролетит» гораздо большее расстояние (во столько раз большее, во сколько раз одно плечо длиннее другого). Это значит, что рукой мы можем быстро схватить любой предмет, а ногами – быстро-быстро отталкиваться от земли, когда бежим или идём. Скорость в природе намного важнее силы, и уж если нельзя достичь сразу и того, и другого, лучше «выбрать» первую. Что эволюция и сделала.

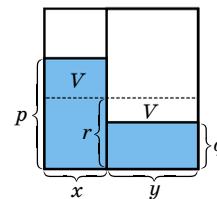
■ ЗАВИСШИЙ ШАРИК («Квантик» № 11, 2017)

Тут всё дело в ленточке. Пока шарик упирался в потолок, его грузоподъёмность была больше суммы его веса и веса ленточки. Когда шарик опустился, его грузоподъёмность стала чуть меньше этой суммы, но всё ещё больше его веса. Часть ленточки, которая легла на пол, уменьшила груз, сравнив его с грузоподъёмностью шарика и позволив ему зависнуть в воздухе.

■ МАТЕМАТИК В ПАРИКМАХЕРСКОЙ

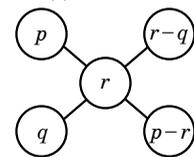
Проверка правила креста

Пусть мы взяли x частей раствора с концентрацией $p\%$ и y частей – с концентрацией $q\%$, причём $p > q$. На рисунке справа эти части изображены в виде двух столбцов одинаковой высоты, а голубым выделены доли, занимаемые перекистью водорода. Доля r перекисти в итоговой смеси отмечена пунктиром. Поскольку общее количество перекисти не изменилось, объёмы, отмеченные буквой V , совпадают.



Получаем условие $x(p - r) = y(r - q)$. Применим правило креста (см. рисунок).

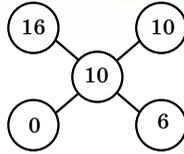
Оно требует, чтобы на $r - q$ частей с концентрацией p приходилось $p - r$ частей с концентрацией q . Подставим $x = r - q$ и $y = p - r$ в найденное условие: $(r - q) \cdot (p - r) = (p - r) \cdot (r - q)$. Оно выполнено, а значит, правило креста работает.



Решение задачи Ф. Нагибина

Сначала – «обычное» решение. В 735 грамах 16-процентного раствора содержится $735 \times 0,16 = 117,6$ г йода. После разбавления спиртом раствор стал 10-процентным, то есть это же количество йода составляет уже 10% от всего количества. Значит, количество раствора после разбавления составило $117,6 : 0,1 = 1176$ г, и надо добавить $1176 - 735 = 441$ г спирта.

Теперь используем правило креста. Так как чистый спирт – это раствор йода с концентрацией 0%, рисуем крест (см. рисунок). Видим, что на каждые 10 частей 16-процентного раствора надо долить 6 частей чистого спирта. Поэтому спирта нужно $735 \times 0,6 = 441$ г. Проще некуда!



■ БЕДНЫЙ ЙОРИК

• Если человек будет двигаться строго на восток, то в конце концов он окажется в исходной точке. Если человек будет двигаться на северо-восток, то рано или поздно окажется на Северном полюсе. Действительно, чтобы продвинуться на 1 м на северо-восток, надо продвинуться на 70 см на восток и на 70 см на север. Так с каждым шагом человек постепенно приближается к северному полюсу. Это легко проверить по глобусу.

• Череп стажил Пётр Петухов, недовольный распределением ролей и завидовавший Чернову. Он разрезал по экватору глобус, положил туда череп и склеил половинки скотчем. Но сделал это неаккуратно, так, что половинки Африки не стыковались. Это легко заметить, если сравнить изображения глобуса на картинках.

■ XXXIX ТУРНИР ГОРОДОВ, ОСЕННИЙ ТУР

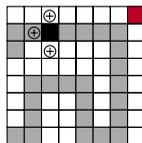
Базовый вариант, 8 – 9 классы

1. Четыре положительны, шесть отрицательны. Если бы среди имеющихся чисел нашлись четыре одного знака, то уже они дали бы шесть сумм этого знака. Поэтому есть три числа одного знака и два – другого. Отсюда – ответ.

2. Да, скажем, $100! - 100$, $100! - 99$, ..., $100! - 2$.

3. Рассмотрим 26-ю, 52-ю и 78-ю монеты. Ясно, что среди них ровно одна фальшивая. Сравнение любых двух монет из трёх выявит её.

4. (Авиэль Боаг, Израиль). Можно. Хватит даже 25 ходов. Будем идти по серому пути на рисунке.



Когда металлоискатель работает впервые, клад сможет находиться не более чем в трёх клетках. Например, если он сработал в чёрной клетке, то подозрительными будут три клетки, помеченные плюсами. Из них легко выбрать нужную за два хода. Если металлоискатель впервые сработает на 24-м ходу, подозрительных клеток останется две, а на 25-м – одна, и оставшихся ходов хватит. Если металлоискатель не сработает ни разу, то мина – в красной клетке.

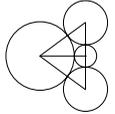
Как показала проверка на компьютере, 24 ходов недостаточно.

5. Окружность лежит в 8-клеточной рамке, окружающей указанную клетку, иначе расстояние от точки окружности вне рамки до дальней вершины исходной клетки будет больше 2 – диаметра окружности. Поэтому окружность разбивается на 8 дуг чередующихся цветов (белые дуги могут быть нулевыми). Заметим, что каждая чёрная дуга не меньше 60° , так как стягивающая её хорда не меньше стороны клетки, то есть радиуса окружности. Поэтому 4 чёрные дуги составляют не менее $\frac{2}{3}$ длины окружности.

Сложный вариант, 8 – 9 классы

1. Удастся. Положим гирию на левую чашу и уравновесим её 8 кг сахара. Уберём гирию и насыпем на левую чашу 6 кг сахара. Поменяем пакеты местами и добавим на правую чашу гирию. Теперь на левой чаше – 8 кг, на правой – 12. Для равновесия не хватает 1 кг сахара на левой чаше, который и насыпаем.

2. На рисунке центры четырёх монет находятся в вершинах двух треугольников со сторонами 3, 4, 5.



3. Уменьшился. Вместо процентов воспользуемся долями: изменение курса на x ($0 < |x| < 1$) означает домножение на $1 + x$. Скажем, если курс возрос на 20%, то $x = 0,2$, а если уменьшился на 20%, то $x = -0,2$. Пусть аналитик предсказал изменения x , y , z , и курс в итоге домножился на a ($a > 0$). Тогда по условию $a = (1 + x)(1 + y)(1 + z) = (1 - x)(1 - y)(1 - z)$, откуда $a^2 = (1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2) < 1$, следовательно $a < 1$.

4. а, б) Можно. Попробуем, подходит ли 3-й ключ к 3-й двери. Если подошёл, то с первыми двумя ключами разберёмся за одну попытку, и ещё за одну попытку найдём ключ от 4-й двери.

Если не подошёл, попробуем, подходит ли он ко 2-й двери. Если да, то 1-й ключ может подойти только к 1-й двери, а 2-й ключ – к 3-й, и ещё за одну попытку находим ключ от 4-й двери. Если нет, то он подходит к 4-й двери. Первые два ключа могут обслужить только две двери, откуда 3-ю дверь открывает 4-й ключ, а с первыми двумя ключами и дверями разберёмся за одну попытку.

В любом случае за три попытки заведомо находим первые четыре ключа. Далее берём следующую четвёрку дверей и повторяем процесс, и т.д. Так найдём все ключи за $100 \cdot \frac{3}{4} = 75$ попыток.

в) Нельзя. Пусть Хвастун умеет это делать за 74 попытки. Разобьём двери и ключи на 25 четвё-

рок подряд идущих. Будем предлагать Хвастуну только те расположения, где ключи не могут открывать двери из других четвёрок, и сообщим ему об этом. Тогда бессмысленно пробовать ключ к двери из другой четвёрки, и у Хвастуна всё равно есть стратегия за 74 попытки. По этой стратегии в какой-то четвёрке он делает не более 2 попыток. У пары попыток есть лишь 4 различных исхода, и для каждого из них Хвастун указывает какое-то расположение ключей в четвёрке. Но вариантов соответствия 4 ключей и дверей больше: (1234), (2134), (1324), (1243), (2143). Противоречие.

5. Не могло. Заметим сначала, что произведение двух k -значных чисел – либо $(2k - 1)$ -значное число, либо $2k$ -значное. Ведь наименьшее k -значное число $1\underline{0\dots0}_{k-1}$, умноженное само на себя, даёт число $1\underline{0\dots0}_{2k-2}$, в котором $2k - 1$ знаков, а наибольшее k -значное, умноженное само на себя, даёт меньше, чем наименьшее $(k + 1)$ -значное число $1\underline{0\dots0}_k$, умноженное само на себя, откуда результат меньше наименьшего $(2k + 1)$ -значного числа $1\underline{0\dots0}_{2k}$.

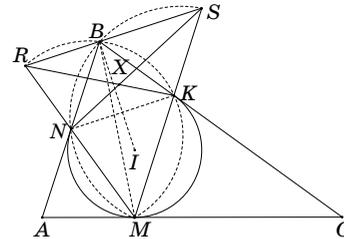
Пусть даны числа $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1}$ и $\overline{a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k}$. Представим, что мы умножаем их в столбик.

В самом правом разряде будет стоять $a_1 a_k$ (возможно, с переносом, который уйдёт в следующие разряды), и в $(2k - 1)$ -м справа разряде тогда – минимум $a_1 a_k$. По условию, $a_1 a_k$ оканчивается на 1. Если есть ещё и перенос, то $a_1 a_k$ не меньше 11, и как минимум этот же перенос есть и в $(2k - 1)$ -м разряде. Но произведение двух цифр не может дать 11, то есть $a_1 a_k$ ещё больше. Значит, в $(2k - 1)$ -м разряде после всех переносов должно получиться минимум 111 (иначе в итоге не получится число из одних единиц), что невозможно — в нашем произведении будет слишком много цифр (не меньше $2k + 1$). Поэтому переноса нет и $a_1 = a_k = 1$. Тогда произведение наших чисел меньше $2\underline{0\dots0}_{k-1} \cdot 2\underline{0\dots0}_{k-1} = 4\underline{0\dots0}_{2k-2}$, то есть в произведении $2k - 1$ разрядов.

Посмотрим на 2-й разряд справа. Там стоит $a_k a_2 + a_{k-1} a_1$, возможно с переносом. Если перенос есть, то минимум такой же перенос будет в $(2k - 2)$ -м разряде, и единица в $(2k - 1)$ -м разряде испортится. Значит, переноса нет, и $a_{k-1} a_1 + a_k a_2 = 1$. Аналогично получаем, что в 3-м разряде (справа и слева) переноса нет и там 1, и т.д. Так мы дойдём до середины и получим, что там тоже 1 без

переноса. Но на среднем месте стоит $a_1^2 + \dots + a_k^2$, что не меньше 2 (ведь $a_1 = a_k = 1$). Противоречие.

6. Пусть X – точка пересечения RK и SN . Прямые NK и RS параллельны, поскольку перпендикулярны биссектрисе угла B . Угол NMK равен углу NKB между касательной и хордой, а последний – углу SBK по доказанной параллельности. Тогда четырёхугольник $RBKM$ – вписанный. Поэтому $\angle RKM = \angle RBM$. Аналогично $\angle SNM = \angle SBM$. Но углы RBM и SBM дают в сумме 180° , значит, и углы XKM и XNM – тоже. Тогда $NMKX$ – вписанный, что и требовалось.



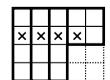
7. Ответы: а) 25; б) 282.

Оценка. Пусть клетка осталась непустой. Изначально в ней был один дом. С каждым поглощением число исходных домов в ней увеличивалось максимум вдвое. Клеткой было сделано не более 4 поглощений, поскольку у неё не более 4 соседей. Значит, в одной клетке могло собраться не более 16 исходных домов. Поэтому число оставшихся домов не меньше $\frac{1}{16}$ площади прямоугольника.

Пример. а) Квадрат 20×20 разобьём на 25 квадратов 4×4 , в каждом можно оставить один дом. Ведь в квадрате 2×2 легко собрать все дома в одной клетке. Соберём их в отмеченных на рисунке клетках. Аналогично соберём отмеченные клетки.



б) (Замир Ашурбеков, 11 кл., г. Дербент). Так как 4500 при делении на 16 даёт остаток 4, достаточно разбить прямоугольник 50×90 на 16-клеточные фигуры и одну 4-клеточную, и в каждой собрать все дома. Справа изображены подходящая 16-клеточная фигура и порядок сбора домов в ней.



Из 16-клеточных фигур сначала сложим прямоугольник 8×10 (рисунок внизу). Прямоугольник 50×90 разобьём на 4 прямоугольника: 50×72 , 32×10 , 32×8 и 18×18 . Первые два разбиваются на прямоугольники 8×10 , третий – на квадраты 4×4 , а последний – на 4 прямоугольника 8×10 и квадрат 2×2 (в центре).

