Игорь Акулич

Фигурковое занятие

– Сегодняшнее занятие нашего математического кружка – фигурковое.

– Вы хотели сказать – фигурное?

– Нет, не хотел. Именно фигурковое. Потому что дело мы будем иметь с *фигурками* – *квадратиками* и *треугольничками*. Да и сам наш кружок – тоже, по сути, фигурка (шучу).

– И что мы будем делать?

– Для начала – разрезать фигуры на фигурки. Начнём с чего попроще. Итак, дан квадрат. Каждую его сторону разбили на n равных частей и через точки деления провели прямые, параллельные сторонам квадрата. В результате квадрат разбит проведёнными прямыми на одинаковые маленькие квадратики. Вопрос: сколько будет этих квадратиков?

– Это легко: n в квадрате!

– А как вы определили?

– Ну… n по одной стороне, да n по другой – и перемножить.

– Верно. А теперь та же история, но с треугольником. Итак, дан правильный треугольник. Каждая его сторона разбита на n равных частей, и через точки разбиения проведены прямые, параллельные двум другим сторонам. В результате треугольник разбит на одинаковые треугольнички – вот пример на рисунке 1 для $n = 6$. Аналогичный вопрос: сколько будет этих треугольничков?

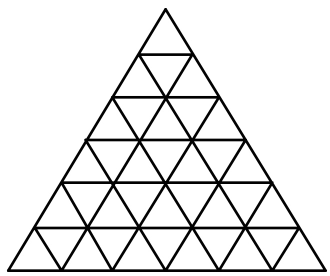


Рис. 1

(*Пауза*)

– Подумайте, я вас не тороплю. Впрочем, давайте вместе решать. Кто хочет к доске?

– Можно, я?

– Конечно.

– Как видно, треугольнички здесь хоть и одинаковые, но различаются по ориентации: одни расположены вершиной вверх, другие – вершиной вниз. Будем говорить, что горизонтальные прямые делят треугольник на *строки* (всего получается n строк). Тогда, если пронумеровать строки сверху вниз, то в k-й строке (для всех k от 1 до n) имеется ровно k треугольничков, расположенных вершиной вверх, и ровно $(k-1)$ треугольничков – вершиной вниз. Значит, надо найти *сумму двух сумм*: первая содержит n слагаемых и равна $1+2+\ldots+n$; вторая содержит $n-1$ слагаемых и равна $1+2+\ldots+(n-1)$.

– И как ты собираешься их находить?

– Такого рода суммы, как я помню, называются *арифметическими прогрессиями* – в них каждое число отличается от предыдущего на одну и ту же величину в одну и ту же сторону. Проще всего найти *среднее значение* (то есть полусумму первого и последнего слагаемых) и умножить его на количество слагаемых.

– Верно, продолжай.

– Тогда первая сумма равна $\frac{1+n}{2}\cdot n=\frac{n^2+n}{2}$, вторая равна $\frac{1+(n-1)}{2}\cdot(n-1)=\frac{n^2-n}{2}$. А сумма сумм составляет $\frac{n^2+n}{2}+\frac{n^2-n}{2}=n^2$. Ишь как – совпало с квадратами…

– Насчёт «совпало» мы ещё поговорим. Итак, решение имеется. Конечно, оно не единственно возможное. В статье Егора Бакаева «Рисуем сумму нечётных чисел» из «Квантика» №3 за 2015 год приводится ещё несколько. Самое короткое из них основано на известной теореме о том, что если размеры подобных фигур отличаются в n раз, то их площади отличаются в n^2 раз. Поэтому площадь треугольничка ровно в n^2 раз меньше площади большого треугольника, и для его покрытия нужно ровно столько же, то есть n^2 треугольничков. Кстати, и для разбиения квадрата на квадратики справедливы такие же рассуждения. Поэтому совпадение ответов – вовсе не совпадение, иначе и быть не могло! Но это только присказка – сказка впереди. Именно одинаковое количество квадратиков и треугольничков привело к созданию вот такой задачи – из двух частей:

1) По указанной схеме квадрат разделён на n^2 квадратиков, а треугольник – на n^2 треугольничков. Сначала в каждом квадратике сидело по мухе. Затем они перелетели в треугольнички так, что в каждом

треугольничке оказалось по одной мухе и любые две мухи, бывшие соседями в квадрате, оказались соседями и в треугольнике. При каких n такое возможно?

2) Тот же вопрос, если сначала мухи сидели в треугольничках, а потом перелетели в квадратики.

– А что значит «соседи»?

– Законный вопрос. И здесь наиболее логичными представляются два варианта:

***а*) соседними считаются квадратики либо треугольнички, имеющие общую сторону;**

***б*) соседними считаются квадратики либо треугольнички, имеющие общую сторону или хотя бы вершину.**

Поэтому фактически мы имеем дело с четырьмя задачами: 1*а*, 1*б*, 2*а* и 2*б*. Что ж, приступайте. В любом порядке, как вам удобней.

– А частные случаи можно рассматривать?

– Не возбраняется.

– Тогда есть первый ответ: во всех четырёх задачах перелёт возможен при $n=1$.

– Грандиозно! Нет сомнений, что если муха единственная, то и соседей у неё как не было, так и не стало. Но всё-таки сей факт представляется как-то очень уж тривиальным. Поэтому давайте в дальнейшем считать, что $n \geqslant 2$.

(*Долгая пауза*)

– Есть результат по варианту «*а*»!

– Для какой задачи – первой или второй?

– Для обеих!

– Ишь как! Это серьёзно. Ну, выходи, рассказывай.

– И квадратики, и треугольнички можно раскрасить в белый и чёрный цвета так, чтобы соседние по стороне фигурки были окрашены в разные цвета. Для квадрата это обычная шахматная раскраска, а для треугольника – все треугольнички, расположенные вершиной вверх, будут одного цвета, а вершиной вниз – другого. Так как соседи каждой мухи в исходном и итоговом положении остаются её соседями, то все мухи, что сидели изначально в фигурках одного цвета, после перелёта опять оказались в фигурках одного цвета.

У квадрата с шахматной раскраской либо поровну чёрных и белых квадратиков (при чётном n), либо квадратиков одного цвета на один больше, чем второго (при нечётном n). А для треугольника мы уже считали – там треугольнички одного из цветов сориентированы вершиной вверх, то есть их $\frac{n^2+n}{2}$, а треугольнички другого цвета сориентированы вершиной вниз, то есть их $\frac{n^2-n}{2}$. Так как при любом натуральном n эти значения заведомо не равны, то для чётных n мухам не удастся перелететь так, как требуется. А для нечётных должно выполняться равенство: $\frac{n^2+n}{2}-\frac{n^2-n}{2}=1$, откуда $n=1$, но этот случай уже рассмотрен. Значит, для задач 1*а* и 2*а* ответ одинаков: это $n=1$.

– Отлично. Обратите внимание, как пригодилось найденное здесь решение, в котором суммировалось количество треугольничков каждого вида по отдельности. А для варианта «*б*» есть достижения?

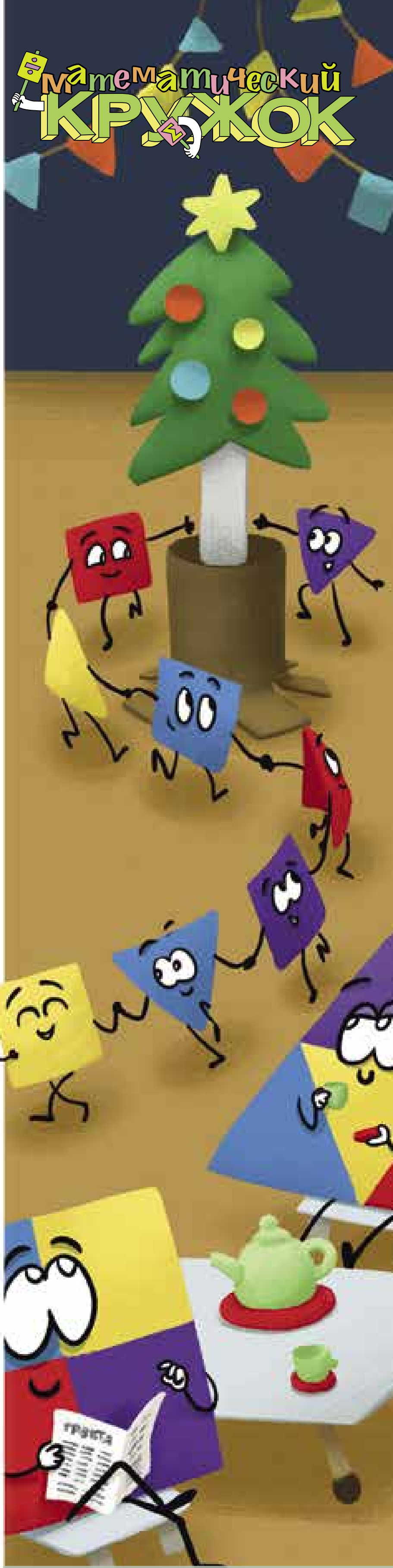
– У меня для задачи 2*б* получен ответ: перелёт возможет только для $n=2$ (если не считать тривиального $n=1$). Я рассуждал так. Если $n=2$, то все треугольнички являются соседями между собой, и все квадратики – тоже. Поэтому и перелетать они могут как им вздумается, лишь бы в итоге в каждом квадратике было по одной мухе. Если же $n \geqslant 3$, то только у трёх треугольничков (угловых) имеется по 3 соседа, а у остальных – больше (7 или 12).

– И что?

– А на квадрате есть целых 4 квадратика, имеющих трёх соседей. И потому хотя бы в один из них должна сесть муха, которая изначально сидела *не в угловом* треугольничке, и потому имела *больше* трёх соседей. Поэтому после перелёта не все её бывшие соседи остались соседями. Противоречие. Значит, при $n \geqslant 3$ перелёт невозможен.

– Блестяще! Итак, что нам осталось? Только задача 1*б*. Так как времени у нас не осталось, и новых идей пока не видно, оставим эту задачу на дом. Фигурковое занятие закончено, до свидания!

...Вот такая история. Как видим, её участники лихо одолели три задачи из четырёх, а последнюю обдумают позже. Но кто мешает читателю сделать то же самое прямо сейчас? Попробуйте! А потом сверьте свои результаты с решениями в следующем номере.



Художник Мария Усеинова