ЁЛОЧКА С ПОЧТОВОЙ МАРКИ

Николай Авилов

Почтовые марки – один из предметов коллекционирования. С 1904 года стали выпускаться новогодние марки. Можно собрать целую коллекцию красивых марок с новогодними сюжетами: зимними пейзажами, снеговиками, детьми, катающимися на санках, рождественскими звёздами.

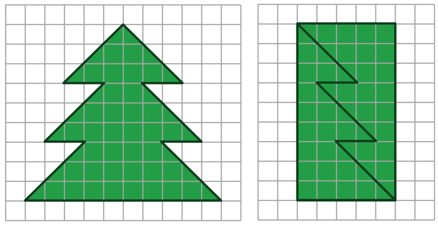
А вот эти марки выпущены в разных странах и в разные годы, но каждая содержит один из главных символов новогодних праздников – ёлочку:

Гренада Россия Беларусь Чехия Литва Канада

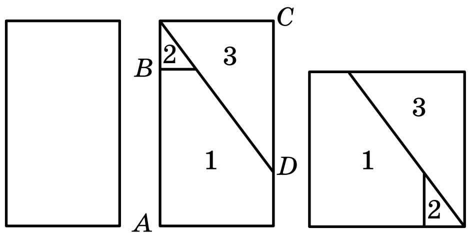
Беларусь Парагвай Гренландия Нидерланды Ирландия

Из представленного набора марок обращаю внимание на новогоднюю ёлочку из Литвы, имеющую строгую геометрическую форму. Наложив на неё квадратную сетку, можно более детально изучить её пропорции и определить размеры ёлочки. Оказалось, что её высота 9 клеточек, основание занимает 10 клеточек. Подсчитайте её площадь (именно такие задания на вычисление площади многоугольников неправильной формы предлагают старшеклассникам на экзамене по математике).

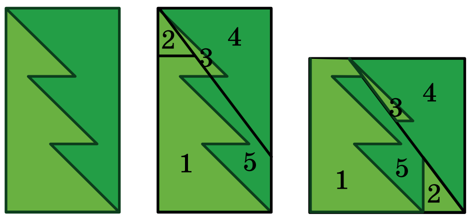
Когда форма и размеры ёлочки заданы, можно сформулировать задачу: разрежьте ёлочку на несколько частей и сложите из них квадрат. Задачи на разрезания многоугольников всегда имеют решение, потому что справедлива теорема Бойяи – Гервина: два многоугольника равной площади являются *равносоставленными*, то есть один из них можно разрезать на несколько частей, из которых складывается второй многоугольник.



Попробуем и мы. Разрезав ёлочку на две равные части, нетрудно сложить прямоугольник 5×9. Значит площадь ёлочки равна 45 квадратным единицам.



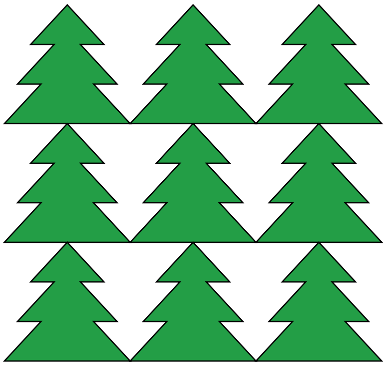
Этот прямоугольник легко перекроить в квадрат, разрезав его лишь на три части (рисунок справа). Здесь отрезки AB и CD равны $\sqrt{45}$ – стороне квадрата, равновеликого прямоугольнику. Убедитесь, что прямоугольник и квадрат равносоставлены, то есть сложены из соответственно равных фигур.

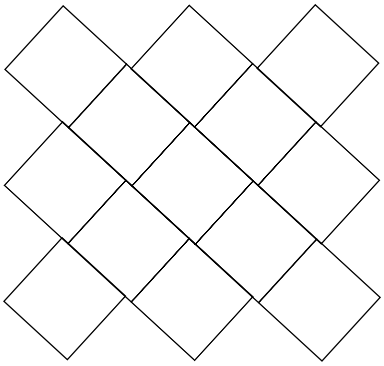


Если совместить эти два разрезания, то получим разрезание ёлочки из почтовой марки на 5 частей такое, что из полученных фигур складывается квадрат. Такое преобразование фигур в квадрат и называется *квадрированием*.

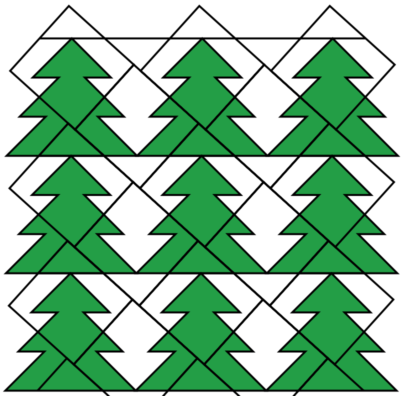
Задача решена, но возникает естественный вопрос: можно ли эту ёлочку разрезать на меньшее число частей, из которых тоже складывается равновеликий ей квадрат? Оказывается, можно!

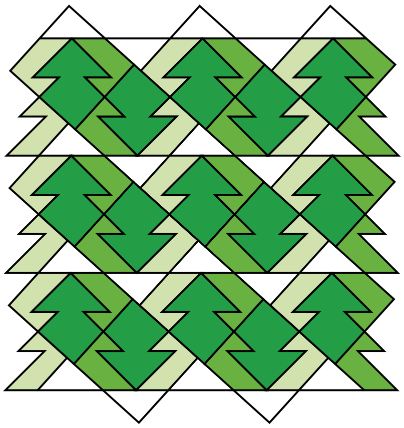
Заметим сначала, что и ёлочками, и равновеликими им квадратами можно замостить плоскость:



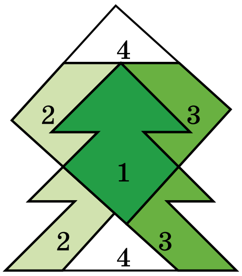


Паркеты мы выбрали довольно хитрые: тут не только полоски квадратов смещены друг относительно друга, но и этажи ёлочек тоже: каждая зелёная ёлочка расположена не ровно над той, что под ней, а со смещением примерно в 1/20 клеточки. Оказывается, если такой паркет из ёлочек нарисовать на бумаге, а паркет из квадратов нарисовать на плёнке и наложить их друг на друга, то можно подобрать такое их расположение относительно друг друга, что ёлочка и квадрат окажутся равносоставленными.* Равные фигуры раскрашены одним цветом:





Поскольку площади ёлочек и квадратов равны, мы получим разрезание ёлочки на 4 части, из которых складывается квадрат. Выделим отдельно одну ёлочку и один квадрат (рисунок справа).



Напоследок предлагаем поэкспериментировать с квадрированием ёлочек с большим числом «этажей» (у той, которую мы разрезали, этажей всего три).

* Попробуйте доказать это самостоятельно. Заметим, что одной картинки не достаточно – на глаз можно не заметить зазоры или наложения.

Художник Алексей Вайнер