Часовая биссектриса

Игорь Акулич

– Даня! Давай-ка проверим твою память!

– Давай, Федя. Если это не больно.

– Помнишь ли ты задачу про стрелки часов, в которой использовалась медиана треугольника?

– Ещё бы – помню, конечно[1].

– Но ведь в треугольнике бывают не только медианы. А биссектрисы чем хуже?

– Подумать надо. Наверно, ничем. Разве что по мелочам...

– Вот именно. Поэтому вот тебе задача про *часовую биссектрису*[2]:

Сколько раз в сутки хотя бы одна из трёх стрелок правильно идущих часов является биссектрисой угла, образованного двумя другими стрелками?

– И всего-то? Да мы с тобой такого типа задачи как орехи щёлкаем! Даже как семечки.

– Так попробуй.

– Пожалуйста. Прежде всего, понятно, что можно рассмотреть не суточный, а полусуточный интервал времени, а потом результат удвоить – ведь в 12:00 все три стрелки занимают то же положение, что и в 00:00. Далее, как обычно в таких случаях, полный оборот обозначим за единицу. Тогда часовая стрелка может пройти путь x, где x лежит в пределах от 0 до 1. Стоп, нехорошо получается! Если мы берём строго полусуточный интервал, то надо исключить один из концов. Какой? Наверно, всё равно, но пусть – начальный. Итак, $0 < x \leqslant 1$, то есть x – строго положительное число, не превышающее 1. Теперь порядок!

Есть, конечно, три варианта – в зависимости от того, какая именно стрелка является биссектрисой. Пусть сначала часовая стрелка есть биссектриса угла между минутной и секундной стрелками. Если часовая стрелка прошла путь x, то минутная продвинулась на $12x$, а секундная – на $720x$. Как же «оформить» эту биссектрису? Чего молчишь – подсказывай!

– А не зафиксировать ли часовую стрелку? Свяжем с ней систему отсчёта. Тогда она становится как бы

[1]Статья «Часовая медиана», «Квантик» № 8 за 2015 г.

[2]Автор задачи неизвестен.

неподвижной – допустим, вертикальной (и пройденный ею путь равен нулю), зато остальные две прошли по кругу расстояния, равные $11x$ и $719x$. И если часовая стрелка – биссектриса, то получается, что угол, на который *отошла* одна из двух остальных стрелок от вертикали, равен углу, на который *не дошла* вторая стрелка до вертикали. Только вот как определить эти углы?..

– А не надо их определять. И вообще, мне твои подсказки не нужны – сам справлюсь!

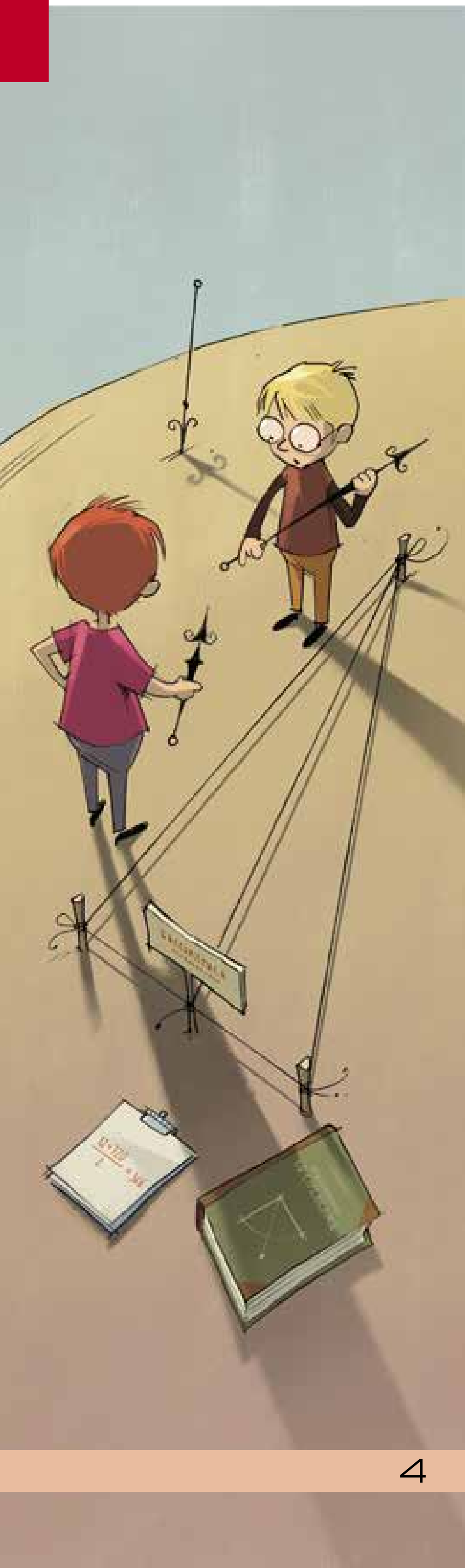
Заметь, что суммарно пути, пройденные минутной и секундной стрелками, дают целое число оборотов – равные углы отклонения от вертикали друг друга компенсируют. И наоборот – если суммарно число оборотов целое, то углы отклонения равны (ведь оба они меньше оборота и иначе друг друга не компенсируют). Дальше трудностей не видно: надо лишь выяснить, при каких положительных x, не превышающих 1, сумма $719x + 11x = 730x$ – целое число. Понятно, что x может быть любой из дробей: $\frac{1}{730}, \frac{2}{730}, ..., \frac{730}{730}$, и всего таких дробей ровно 730 штук. Вот так – треть задачи решена. Есть возражения?

– Вроде нет. Продолжай.

– Хорошо. Пусть теперь биссектрисой является минутная стрелка. Фиксируем её. Тогда часовая и секундная стрелки прошли пути $-11x$ (ишь ты – отрицательное число, то есть как бы крутится в обратную сторону) и $708x$. Снова получаем, что их сумма $697x$ – целое. Вот ещё 697 моментов времени. Наконец, если биссектриса – секундная стрелка, то целым числом должно быть... один момент... вот – $1427x$. Ещё 1427 решений. Всего же выходит $730 + 697 + 1427 = 2854$. Именно столько раз за половину суток одна из стрелок является биссектрисой между двумя другими!

– Ошибаешься. Ведь в 12:00 *каждая* из стрелок есть биссектриса, а момент-то один и тот же!

– Да, верно. Упустил. Значит, надо вычесть 2. Получаем за полусутки 2852 момента, а за целые сутки – вдвое больше, то есть 5704. Хотя... а вдруг ещё есть такие «кратные совпадения»?



– Думаю, что нет. Ведь если хотя бы две стрелки одновременно являются биссектрисами, то такое возможно только либо когда все три стрелки совпадают, либо образуют между собой три равных угла по 120°. А ведь мы с тобой, помнится, уже выяснили[3], что первое возможно, лишь когда все стрелки вертикальны, а второго не бывает никогда. Так что твой ответ верный, но… я вдруг понял, что уравнения тут вообще были не нужны.

– Это как?

– А вот как. Рассмотрим сначала пару стрелок – минутную и секундную. Создадим *фиктивную* стрелку, которая направлена по биссектрисе угла между ними, а точнее – *две* фиктивные стрелки, потому что в произвольный момент времени минутная и секундная стрелки образуют *два* угла (один из них, как правило, меньше развёрнутого, второй – больше, хотя иногда они могут оба стать развёрнутыми). В частности, в начальный момент (00:00) одна фиктивная стрелка направлена вверх (будем называть её «стрелка *А*»), а вторая – вниз («стрелка *Б*»). Ясно, что скорость вращения каждой фиктивной стрелки равна полусумме (или, что то же самое, среднему арифметическому) скоростей вращения минутной и секундной стрелок. Поэтому каждая фиктивная стрелка делает за полусутки $\frac{12+720}{2}=366$ оборотов. Значит, надо всего лишь определить, сколько раз за этот период совпадут часовая и каждая из фиктивных стрелок. А такого рода задачи мы уже решали и выяснили[4]: если две стрелки, стартуя из одного положения, за какой-то промежуток времени делают k_1 и k_2 оборотов, где k_1 и k_2 – целые числа и $k_1 > k_2$, то в течение всего промежутка они совпадают ровно $k_1 - k_2$ раз (если исключить начальный момент, но включить конечный). А здесь у нас что? Фиктивная стрелка *А* делает 366 оборотов, а часовая – всего 1. Получается, что они за полсуток совпадут

[3] Статья «Приключения продолжаются», «Квантик» № 6 за 2012 г.

[4] Статья С.Дориченко «Приключения со стрелками», «Квантик» № 1 за 2012 г.

$366-1=365$ раз. Со стрелкой *Б* (которая изначально смотрит вниз) такой подход не годится – стартовые позиции не совпадают. Но сразу видно, что прежде, чем с часовой стрелкой пересечётся фиктивная стрелка *А*, с ней *непременно* совпадёт стрелка *Б*. Мысленно представь себе всю картину – и сразу согласишься.

– Да, соглашусь.

– Потому и стрелка *Б* совпадёт с часовой за полсуток тоже 365 раз. В целом же часовая стрелка совпадёт с фиктивными стрелками за полсуток $365 \cdot 2=730$ раз, а за сутки – $730 \cdot 2=1460$ раз.

Пусть теперь биссектриса – это минутная стрелка. Тогда фиктивные стрелки делают за полсуток по $\frac{1+720}{2}=360$ *с половиной оборотов*! Неприятно – число оборотов должно быть целым. Ну, тогда будем считать сразу за сутки – чего мелочиться? Получается 721 оборот. Минутная же стрелка делает за сутки 24 оборота. Поэтому каждая из фиктивных стрелок совпадёт с минутной $721-24=697$ раз в сутки, а обе вместе – $697 \cdot 2=1394$ раза.

Остался последний случай: биссектриса – секундная стрелка. Поскольку здесь, очевидно, тоже полусутками не обойтись, можно сразу подсчитать, что каждая фиктивная стрелка сделает за сутки $1+12=13$ оборотов, секундная же – 1440 оборотов, и потому за сутки совпадение секундной стрелки с какой-либо из фиктивных будет иметь место $(1440-13) \cdot 2=$ $=2854$ раза.

Итого получается $1460+1394+2854=5708$ моментов в сутки, когда одна из стрелок является биссектрисой угла между двумя другими. Осталось «сбросить» пару «тройных совпадений» (в 12:00 и 00:00), и получим $5708-4=5704$ момента. Ответ тот же, что и у тебя.

– Слушай, поскольку и с медианой, и с биссектрисой мы разобрались, может, пришло время атаковать и высоту?

– Я бы и рад, но где её взять? Хотя «часовая высота» – звучит очень выразительно!

Художник Алексей Вайнер