Александр Блинков

РАЗОБЬЁМ НА РАВНОБЕДРЕННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Семиклассникам часто предлагают задачи, в которых прямая разбивает (разрезает) треугольник на два равнобедренных. Основная трудность при их решении – возникает много случаев, и трудно ни один не упустить. Поэтому полезно провести небольшое исследование: какие случаи возможны и что в каждом из них можно узнать об углах исходного треугольника.

Разрез, делящий треугольник на два треугольника, должен идти через вершину. Пусть в треугольнике ABC отрезок CD разбивает его на два равнобедренных треугольника ACD и BCD. Один из углов ADC или BDC, очевидно, не будет острым. Пусть для определённости $\angle ADC \geqslant 90°$; тогда основанием равнобедренного треугольника ACD может быть только отрезок AC. В треугольнике BCD любая из сторон может служить основанием, и возникают три случая (рис. 1, *а*–*в*).

Обозначив углы A и B треугольника ABC через α и β соответственно и отметив равные стороны и углы при основаниях в равнобедренных треугольниках, получим:

1) BC – основание треугольника BCD (рис. 1, *а*). Тогда медиана CD в два раза меньше, чем AB, значит, $\angle \boldsymbol{ACB} = \mathbf{90°}$. Таким образом, треугольник ABC – прямоугольный, α и β **– острые углы, сумма которых равна 90°**.

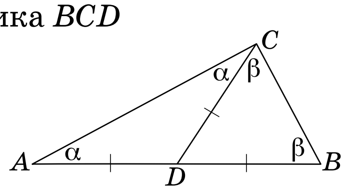


Рис. 1, *а*

2) BD – основание треугольника BCD (рис. 1, *б*). Тогда угол BDC – внешний для треугольника ACD, и $\beta = 2\alpha$, причём оба этих угла острые, значит, $\alpha < \mathbf{45°}$. Угол ACB может быть острым, прямым или тупым, но $\angle \boldsymbol{ACB} = 180° - 3\alpha > \mathbf{45°}$.

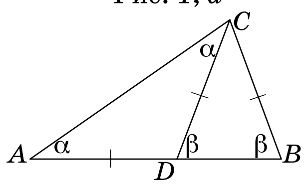


Рис. 1, *б*

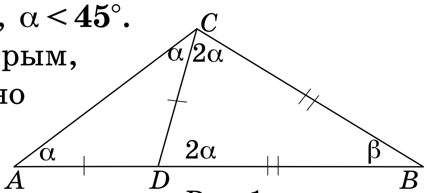


Рис. 1, *в*

3) CD – основание треугольника BCD (рис. 1, *в*). Тогда $2\alpha < 90°$, то есть $\alpha < 45°$, $\beta = 180° - 4\alpha$ и может быть любого вида. Угол ACB также может иметь любой вид, но $\angle ACB = 3\alpha$, поэтому $\angle ACB < 135°$.

Применим эти результаты к конкретным задачам.

Задача 1 (Д. Шноль). *Один из углов треугольника равен 40°. Известно, что его можно разбить отрезком на два равнобедренных треугольника. Найдите остальные углы данного треугольника.*

Решение. Пусть в треугольнике ABC угол A равен 40°, а отрезок CD разбивает его на два равнобедренных треугольника ACD и BCD. В соответствии со сказанным выше, получим:

1) $\angle B = 50°$; $\angle C = 90°$ (рис. 2, *а*).

2) $\angle B = 80°$; $\angle C = 60°$ (рис. 2, *б*).

3) $\angle C = 120°$; $\angle B = 20°$ (рис. 2, *в*).

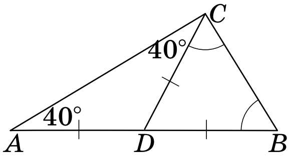


Рис. 2, *а*

Всё? Нет, необходимо учесть, что при таком разбиении тупым может оказаться угол BDC! Значит, ещё три случая? Нет, всего два (*подумайте, почему*).

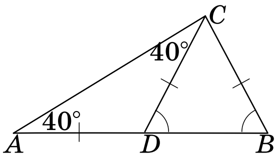


Рис. 2, *б*

4) $\angle B = 20°$; $\angle C = 120°$ (рис. 2, *г*). *Ответ в этом случае совпал с предыдущим. Почему?*

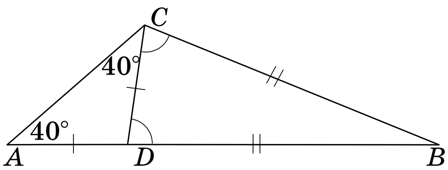


Рис. 2, *в*

5) $\angle B = 35°$; $\angle C = 105°$ (рис. 2, *д*).

На этот раз всё? А если разрез проходит через вершину заданного угла? Соотнесём условие задачи с нашим исследованием и убедимся, что возможен ещё только один случай, аналогичный показанному на рисунке 1, *в*.

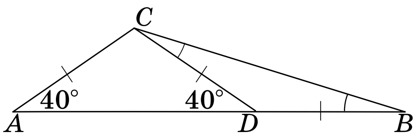


Рис. 2, *г*

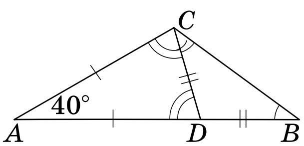


Рис. 2, *д*

6) $\angle B = \frac{40°}{3}$, $\angle C = \frac{380°}{3}$ (рис. 2, *е*).

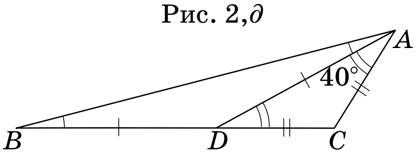


Рис. 2, *е*

Ответ*:* 90° и 50°; 60° и 80°; 120° и 20°; 105° и 35°, $\frac{40°}{3}$ и $\frac{380°}{3}$.

Задача 2 (А. Блинков, Д. Шноль, XV турнир математических боёв имени А. П. Савина, 7 кл.). *Треугольник ABC можно разрезать на два равнобедренных треугольника двумя способами, проводя прямые через вершину C. Найдите углы треугольника ABC.*

Решение. Опять обратимся к нашему исследованию. Заметим, что если к разрезу на рисунке 1, *а* добавить второй разрез, соответствующий рисунку 1, *б* или 1, *в*, получится треугольник с углами 90°, 60° и 30°. Для него все три способа разрезания совпадают.

Попробуем добавить второй разрез CE к случаю на рисунке 1, *б*, учитывая, что $\beta = 2\alpha$. Так как угол AEC – внешний для треугольника BEC, то $\angle AEC > \angle BEC = 2\alpha > \angle EAC = \alpha$. Следовательно, AE не может оказаться основанием равнобедренного треугольника ACE. Сторона AC также не может быть основанием этого треугольника, так как $\angle ACE \neq \angle ACD = \angle CAE$. Значит, $AC = AE$. Тогда угол AEC острый, поэтому основанием равнобедренного треугольника BEC является BC (рис. 3, *а*).

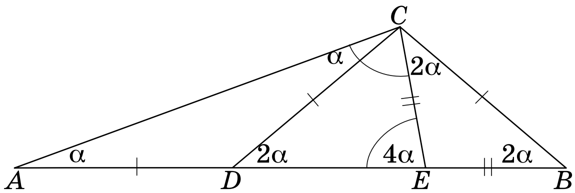


Рис. 3, *а*

В этом случае $\angle ACE = \angle AEC = 4\alpha$. Тогда значение α можно найти, например, по сумме углов треугольника ACE: $\alpha + 4\alpha + 4\alpha = 180°$; $\alpha = 20°$. Значит, углы исходного треугольника: 20°, 40° и 120°.

Второй разрез можно добавить и на рисунке 1, *в* (рис. 3, *б*). Тогда, учитывая, что $\angle BCD = \angle BDC = 2\alpha$ и $\angle ACE = \angle AEC = 2\beta$, получим: $\angle ACB = 3\alpha = 3\beta$, то есть $\alpha = \beta$. Значит, треугольник ABC – равнобедренный, $\alpha + \alpha + 3\alpha = 180°$; $\alpha = 36°$. В этом случае углы исходного треугольника: 36°, 36° и 108°.

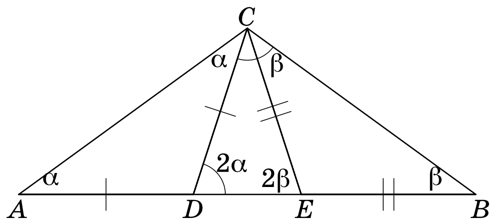
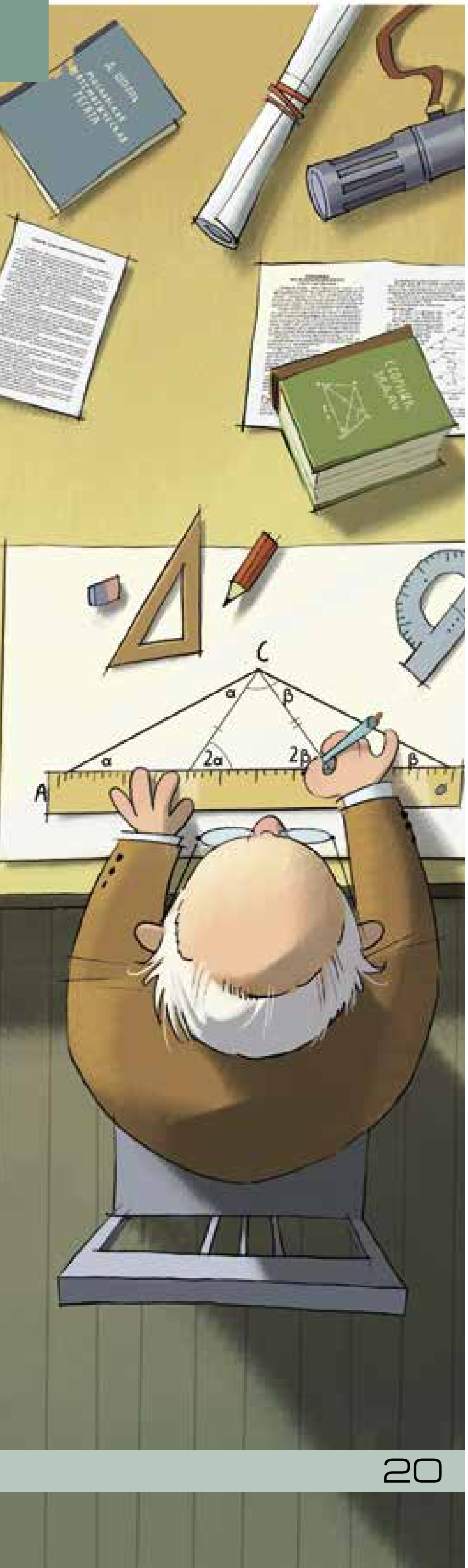


Рис. 3, *б*

Ответ*:* 20°, 40° и 120° или 36°, 36° и 108°.

Заметим, что в равнобедренном треугольнике ABC каждая из прямых CD и CE разбила угол ACB в отношении 2:1. Это не случайно (см. ниже задачу 3).

Посмотрим теперь на аналогичные разбиения выпуклых четырёхугольников. Пусть каждая из двух прямых разбивает выпуклый четырёхугольник $ABCD$ на два равнобедренных треугольника. Понятно, что



такие прямые должны содержать диагонали этого четырёхугольника.

При таких разбиениях образуются четыре равнобедренных треугольника: ABC, ADC, BAD и BCD (рис. 4, *а*–*в*). В каждом из них либо равны две стороны исходного четырёхугольника, либо сторона равна диагонали. Поскольку сумма углов четырёхугольника равна 360°, хотя бы один из его углов – не острый. Следовательно, хотя бы в одном из равнобедренных треугольников, полученных при разбиении, диагональ будет основанием. Пусть это треугольник ABC, в котором $AB = BC$. Тогда для треугольника ADC возможны два случая: 1) $AD = DC$ (рис. 4, *а*, *б*); 2) $AD = AC$ (рис. 4, *в*). В каждом из этих случаев посмотрим, что может произойти при разбиении $ABCD$ диагональю BD.

1) Такой четырёхугольник называется **дельтоидом**, он симметричен относительно диагонали BD, и возможны, в свою очередь, два варианта:

а) $AB = AD$; $CB = CD$ (рис. 4, *а*). Тогда ***ABCD* – ромб.**

б) ***ABCD* – дельтоид**, в котором ***AD = BD = CD*** (рис. 4, *б*).

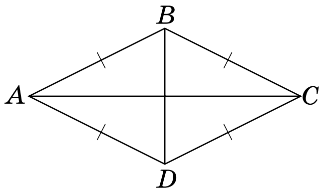


Рис. 4, *а*

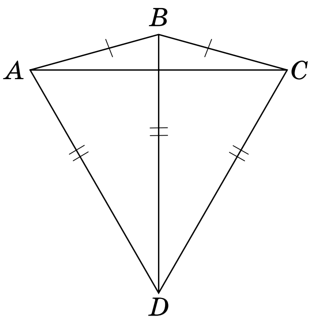


Рис. 4, *б*

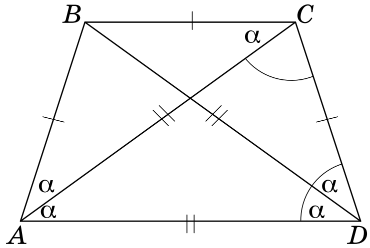
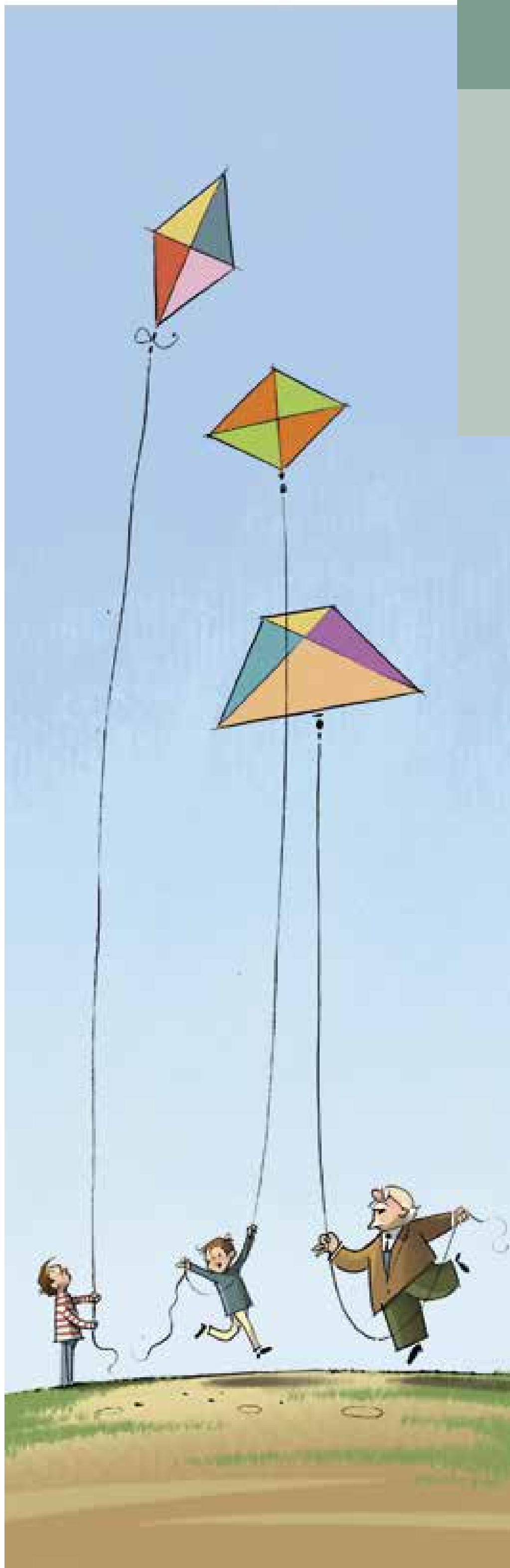


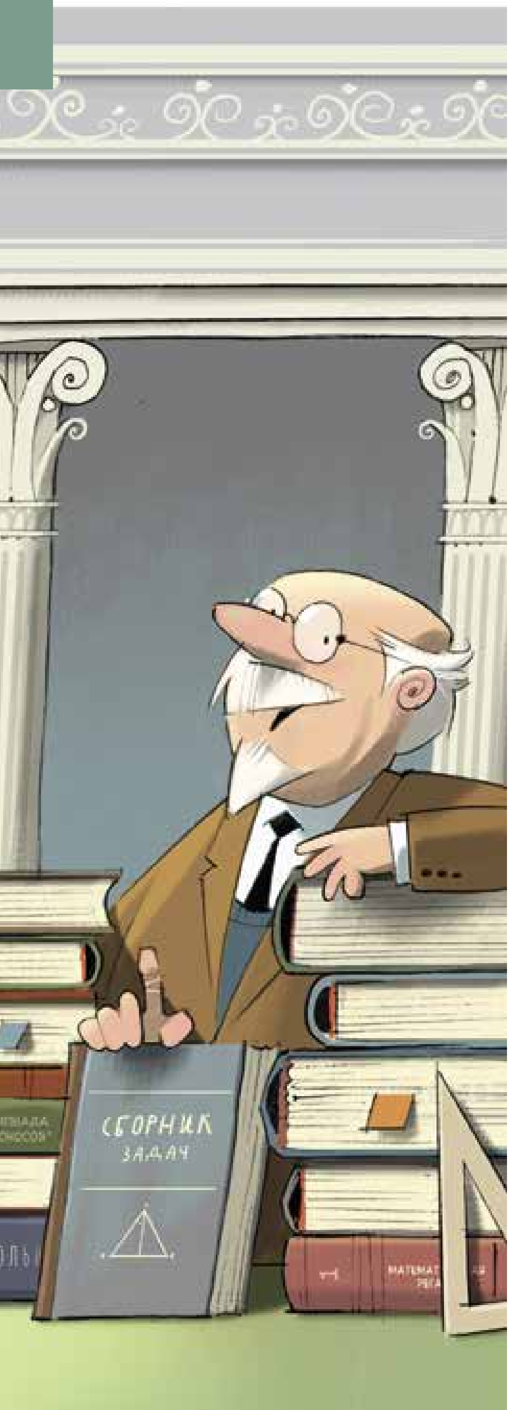
Рис. 4, *в*

2) $BC = CD$; $AD = BD$ (рис. 4, *в*). Докажем, что ***ABCD* – равнобокая трапеция, в которой боковая сторона равна меньшему основанию** (*почему меньшему, а не большему?*). Так как $\angle ABC \geqslant 90°$, равны треугольники ABD и DCA (по трём сторонам), а значит, равны их соответствующие высоты, проведённые из вершин B и C, откуда $BC \parallel AD$.

Можно найти углы этой трапеции, так как её диагонали – биссектрисы углов при большем основании. Отметив равные углы, из треугольника ACD получим: $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°$; $\alpha = 36°$.

Таким образом, углы трапеции $ABCD$: **72°** и **108°**.





Художник Алексей Вайнер

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1 (Д. Шноль, Московская математическая регата 2008/09, 7 кл.). Два угла треугольника равны 100° и 60°. Как его разрезать на два равнобедренных треугольника?

2 (Д. Шноль, Московская математическая регата 2015/16, 7 кл.). Про треугольник, один из углов которого равен 120°, известно, что его можно разрезать на два равнобедренных треугольника. Чему могут быть равны два других угла исходного треугольника?

3 (А. Заславский, XXIII турнир математических боёв имени А. П. Савина, 7 кл.). Прямая разрезает равнобедренный треугольник на два равнобедренных треугольника. В каком отношении эта прямая может разделить угол треугольника?

4 (А. Блинков, XXIII турнир математических боёв имени А. П. Савина, 7 кл.). Биссектриса BD треугольника ABC отсекает от него равнобедренный треугольник BCD, а биссектриса CE отсекает от ABC тупоугольный равнобедренный треугольник ACE. Найдите углы треугольника ABC.

5 (Олимпиада «Ломоносов»). В равнобедренном треугольнике ABC каждый из углов содержит нецелое число градусов. Известно, что через одну из вершин этого треугольника можно провести прямолинейный разрез, разбивающий его на два равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника ABC.

6 (А. Блинков, Московская математическая регата 2016/17, 9 кл.). Верно ли, что любой треугольник можно разбить на четыре равнобедренных треугольника?

7 (Д. Шноль). На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки M и K соответственно. Может ли оказаться так, что треугольники ABM, BMK и MKC – равнобедренные и имеют равные площади?

8 (М. Прасолов, А. Перепечко). Каждая из трёх прямых делит четырёхугольник на два равнобедренных треугольника. Найдите углы этого четырёхугольника.

9 (А. Блинков, Московская математическая регата 2008/09, 8 кл.). Диагональ четырёхугольника делит его на два равнобедренных прямоугольных треугольника. Найдите все возможные значения углов этого четырёхугольника.

10 (А. Блинков, Ю. Блинков, Московская математическая регата 2010/11, 8 кл.). Диагональ трапеции делит её на два прямоугольных равнобедренных треугольника. Сравните длину этой диагонали и длину средней линии трапеции.

11 (Фольклор). Две стороны четырёхугольника равны 1 и 4. Одна из диагоналей равна 2 и делит его на два равнобедренных треугольника. Найдите периметр четырёхугольника.