НАШ КОНКУРС («Квантик» № 1, 2018)

21. *Читая книгу Мартина Гарднера, Настя заметила, что её папе в n^2 году исполнится n лет. Сколько лет исполняется отцу в 2018 году?*

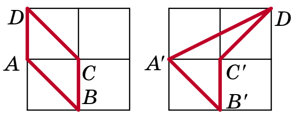
Ответ: 38. По условию, Настин папа родился в году с номером $n^2 - n$. Ближайшие к 2018 варианты: $44^2-44=1892$, $45^2-45=1980$, $46^2-46=2070$. Ясно, что $n=45$ подходит, и в 2018 году папе будет 38 лет. Убедимся, что этот вариант единственный. Если $n=44$ или меньше, то год, в котором папе исполнится n лет – 1936 или более ранний, и он ещё не наступил, когда Настя читает книгу. Но первая книга Гарднера вышла позже, в 1952 году. Если же $n=46$ или больше, то в 2018 году Настин папа ещё не родился.

22. *Марсианская роза каждую ночь меняет свою высоту. Если высота была не больше метра, то она удваивается, иначе – уменьшается на метр. Спутник пролетает над розой каждый третий день. Может ли он каждый раз видеть розу одной и той же высоты?*

Ответ: может. Пусть высота розы $\frac{1}{3}$ м. За три ночи высота дважды удвоится, а затем уменьшится на метр и станет снова равна $\left(\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 2\right)-1=\frac{1}{3}$ м, так что спутник будет всегда видеть одно и то же.

23. *Петя придумал признак равенства четырёхугольников. Он утверждает, что если даны четырёхугольники ABCD и A'B'C'D' (не обязательно выпуклые), причём три стороны одного соответственно равны трём сторонам другого ($AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $CD=C'D'$) и диагонали одного соответственно равны диагоналям другого ($AC=A'C'$, $BD=B'D'$), то и сами четырёхугольники равны. Не ошибается ли Петя?*

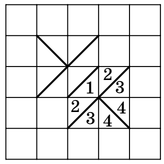
Ответ: ошибается. Пример см. на рисунке.



24. *Квадрат 5×5 разбили на единичные квадратики и в каждом из них одним из двух возможных способов провели диагональ. Получилось какое-то разбиение исходного квадрата на 50 маленьких треугольников. Всегда ли удастся окрасить 25 треугольников в чёрный цвет так, чтобы чёрные треугольники не имели общих сторон?*

Ответ: не всегда. Пусть удалось покрасить так 25 треугольников. Каждый квадратик содержит не больше одного чёрного треугольника – ведь эти треугольники касаются, – то есть, чёрных треугольников не больше 25. А чтобы их было ровно 25, нужно в каждом квадратике окрасить чёрным ровно один треугольник.

Проведём 7 диагоналей, как показано на рисунке, а остальные – как угодно. Один из двух треугольников в центре будет чёрным, и так как рисунок симметричен, можно считать, что это треугольник 1. Тогда треугольники, отмеченные цифрой 2 – белые (как соседние с 1), а цифрой 3 – чёрные (в одном квадратике с белым). Тогда оба треугольника 4 белые, что невозможно.



25. *В куче 131 камень. Двое берут камни по очереди. Сначала первый игрок берёт k камней, где k – некоторое фиксированное число. Каждым следующим ходом игрок берёт либо столько же камней, сколько брал его соперник на предыдущем ходу, либо на один больше. Кто не может сделать ход – проиграл. Кто из игроков может гарантировать себе победу, как бы ни играл его соперник, если а) $k=9$; б) $k=1$?*

Ответ: а) первый; б) первый.

а) Для победы первому игроку нужно сначала взять 9 камней, а затем 10, 11, 12, 13 и 14. Это всегда возможно: если противник взял столько же камней, сколько первый, то нужно взять на один больше, а если противник взял на один больше – то столько же, сколько противник. Всего после своего шестого хода у первого игрока будет $9+10+11+12+13+14=69$ камней. Сколько камней будет к этому моменту у второго игрока? Минимум $9+10+11+12+13=55$, когда он всегда берёт столько же, сколько первый. Максимум $10+11+12+13+14=60$, когда он всегда берёт на 1 камень больше. Суммарно игроки возьмут от 124 до 129 камней, для следующего хода второго останется от 2 до 7 камней, и второй игрок не может сделать ход.

б) Первый выигрывает по той же стратегии: берёт 1, 2, ..., 11 камней. Всего он заберёт 66 камней, а второй игрок к этому моменту – от 55 до 65. Суммарно они возьмут от 121 до 131 камня, останется не больше 10 камней, и второй игрок не сможет сделать ход.

ГРУЗИНСКИЕ МОНЕТЫ

(«Квантик» № 2, 2018)

Почти все символы, которые мы видим на монетах (кроме ც из первого вопроса на двойном абазе 1808 года), есть в алфавите. Видимо, номинал монеты и год чеканки обозначались буквами.

Видно два места, в которых буквы на разных монетах отличаются: одна буква в первой строчке и группа из трёх или четырёх букв в последней. При этом первая буква совпадает у монет одинакового достоинства, стало быть, это номинал:

ე – пули ი – полубисти რ – полуабаз
ს – абаз უ – двойной абаз

Пометим эти буквы в алфавите зелёным:

აბგდევზთიკლმნოპჟრსტუფქღყშჩცძწჭხჯჰ

Теперь выпишем годы подряд:

1804 – ჩყდ	1808 – ჩყჱ	1831 – ჩყლა
1805 – ჩყე	1810 – ჩყი	
1806 – ჩყვ	1815 – ჩყიე	

Сравним 1805, 1810 и 1815 годы: последние две буквы в 1815 (იე) – это последние буквы в 1810 (ი) и 1805 (ე). Ясно, что ი = 10, а ე = 5. Заметим, что последние буквы в 1804 (დ), 1805 (ე) и 1806 (ვ) идут в алфавите подряд, а алфавит начинается с буквы ა, которая встречается в 1831. Пометим буквы, встречающиеся в датах, красным:

აბგდევზთიკლმნოპჟრსტუფქღყშჩცძწჭხჯჰ

Теперь видно, как устроена запись чисел: первые 9 букв обозначают единицы, следующие – десятки, потом сотни и тысячи. Буква ჱ в 1808 должна обозначать «8 единиц», **единственное место, куда её можно поместить – это между ზ (7) и თ (9). Мы ответили на первый вопрос.**

Теперь вернёмся к номиналам. Мы видим, что пули = 5, а полубисти = 10. Стало быть, **в одном бисти (=20) четыре пули.**

Дальше надо считать: оказывается, между ლ = 30 и ყ = 800 не хватает ещё одной буквы. В зависимости от расположения недостающей буквы, полуабаз равен 90 или 100, а абаз – 100 или 200. Но абаз вдвое больше полуабаза, так что полуабаз равен 100, абаз – 200, двойной абаз – 400. Ясно, что второй вариант правильный. Итак, в **абазе десять бисти, и мы ответили на второй вопрос.**

Ответ на третий вопрос – это просто проверка того, что мы уже знаем.

Полуабаз 1807 года –

რ ქართული თეთრი ჩყზ

Двойной абаз 1819 года –

უ ქართული თეთრი ჩყით

Абаз 1923 года – ს ქართული თეთრი ჩშკგ

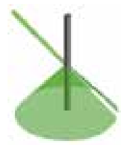
Теперь остался последний, **четвёртый вопрос**. Сравнение абаза 1804 года с монетами из условия, двумя абазами и полуабазом 1804 года, показывает, что резчик ошибся в номинале: კ (20) вместо ს (200). Аналогично, сравнение бисти 1806 года с пули 1806 года и с нашей таблицей номиналов показывает, что с датой всё в порядке, а вот в номинале опять ошибка: должно быть კ (20), а вырезано ვ (6). Видимо, в этом случае резчика подвело внешнее сходство букв.

Замечания. Ошибка с абазом случилась на первом году чеканки и сразу была исправлена: такая монета очень редкая. А вот ошибку в бисти исправлять так и не стали, и она присутствует во всех бисти (которые чеканили до 1810 года). Дело в том, что, хотя монеты чеканились в Тбилиси, резчики были русские и, видимо, не сразу разобрались с записью чисел в грузинском алфавите. Хотя могли бы: ровно такая же система применялась в России до Петра I и используется до сих пор в церковнославянском языке.

А ещё одна упомянутая исчезнувшая буква (ჲ) обозначала 60, но этого из условия задачи установить было нельзя – только то, что она располагалась где-то между ლ (30) и რ (100).

СВЕТ НА ЗАНАВЕСКЕ («Квантик» № 2, 2018)

Солнечный свет отражается нитями занавески. Нить – это как бы длинный цилиндр. Солнечные лучи падают на него, образуя определённый угол с осью цилиндра, и отражаются под таким же углом, но расходятся во все стороны, образуя конус, как на рисунке (см., например, статью А. Щетникова «Световая окружность» в «Квантике» № 5, 2015).



В занавеске две семейства таких нитей, вертикальные и горизонтальные. От каждого семейства лучи отражаются под фиксированным углом, поэтому попавшие к нам в глаз лучи тоже образуют конус (только «перевёрнутый»). Пересечение конуса с занавеской выглядит как дуга (часть гиперболы); если ось конуса вертикальна, то дуга «горизонтальна», а если ось конуса горизонтальна, то дуга «вертикальна». Значит, мы должны видеть две дуги: одну – от вертикальных нитей (она идёт слева направо), и вторую – от горизонтальных (идёт сверху вниз).

Почему же «вертикальных» дуг две? Посмотрите на плетение на рисунке: горизонтальные нити то ныряют под вертикальные, то выныривают. Получается, что видимые участки горизонтальных нитей изогнуты и состоят как бы из двух частей – двух сторон «треугольника», то есть идут в двух разных направлениях.

То же верно и для вертикальных нитей, но в меньшей степени – они прямее, так как сильнее натянуты, весь вес на них держится, – и поэтому (а также из-за ракурса) раздвоение горизонтальных дуг почти незаметно на фото.

ДИСКИ НА КОЛЁСАХ («Квантик» № 2, 2018)

И спереди, и сзади на грузовой машине стоят одни и те же стандартные колёса, только спереди они одиночные, а сзади – сдвоенные.

Спереди колесо обычно крепят выпуклостью наружу: внутри выпуклости остаётся удобное место для деталей, помогающих управлять поворотом колеса и т.п. Но сзади пару колёс надо крепить к одному и тому же месту оси (например, чтобы крепление для внешнего колеса не мешало снимать внутреннее колесо), для чего колёса надо располагать выпуклостями друг к другу (соединяя с местом крепления), а вогнутой частью наружу.

НАДУТАЯ БУТЫЛКА

Положим открытую бутылку в морозильную камеру, воздух в бутылке остынет. Закроем её после охлаждения прямо внутри холодильника и вытащим наружу. Воздух в бутылке нагреется, его давление в том же объёме повысится. Ещё способ: положим бутылку на воду и накроем тазом. Опустим таз на глубину около метра, давление там больше. Закроем бутылку там и поднимем обратно. Этот метод посложнее, но подойдёт и для получения куда больших давлений.

БРАМС, КАРУЗО, ВЕНЯВСКИЙ

Выдумана история про Карузо. Он, конечно, вполне мог написать книгу воспоминаний, пародируя знаменитую книгу Даниэля Дефо «Робинзон Крузо», но никак не мог использовать очки для близорукости в качестве лупы, потому что линзы у них не собирающие, а рассеивающие.

РАЗОБЬЁМ НА РАВНОБЕДРЕННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Ответы и указания

1. См. рис. 1.

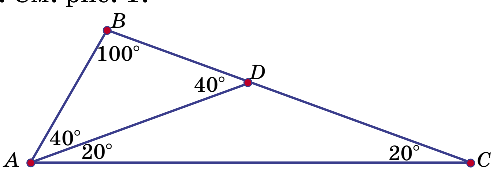


Рис. 1

2. Два случая: 40° и 20° или 45° и 15°.

3. Либо пополам, либо в отношении 2 : 1. Биссектриса может быть проведена либо к основанию, либо к боковой стороне (два случая). В каждом из них вычислите углы получившихся треугольников.

4. 36°, 72°, 72° или $\frac{180^\circ}{7}$, $\frac{360^\circ}{7}$, $\frac{720^\circ}{7}$. Требуется рассмотреть три случая, один из которых оказывается невозможным.

5. $\frac{180^\circ}{7}$, $\frac{540^\circ}{7}$, $\frac{540^\circ}{7}$. Разрез может проходить через вершину основания (два случая) или вершину, противолежащую основанию (ещё два случая). Во всех случаях, кроме одного, возникают противоречия.

6. Верно. Проведите высоту к большей стороне треугольника, после чего в каждом из прямоугольных треугольников проведите медиану к гипотенузе.

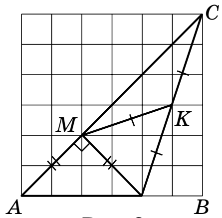


Рис. 2

7. Может, см. рис. 2.

8. 36°, 36°, 72°, 216° (см. рис. 3). Прямые должны содержать меньшие стороны четырёхугольника и внутреннюю диагональ.

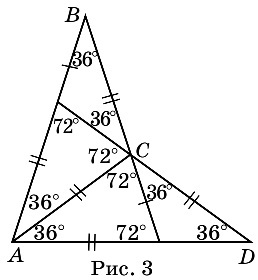


Рис. 3

9. Четыре угла по 90°, или два угла по 45° и два угла по 135°, или 45°, 135° и два угла по 90°.

10. Средняя линия больше диагонали. Проведя рассуждение, убедитесь, что единственный возможный случай – прямоугольная трапеция с острым углом 45°, в которой основания относятся как 2:1.

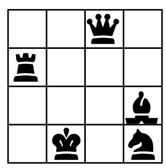
11. Периметр равен 11. Возможен единственный случай, так как в остальных случаях возникают противоречия с неравенством треугольника.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ НИЖЕГОРОДСКОЙ (XV ОТКРЫТОЙ) МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

Идеи решений задач

7 класс

1. Ответ: на поле 4×4, см. рисунок.



Меньшее поле для 5 фигур могло быть только 3×3. Но после постановки ферзя останутся максимум 2 непобитые клетки, а остальных фигур 4.

2. Ответ: 14 л. При переливании объём воды в каждом ведре остаётся целым числом литров, а в ведре, в которое переливают, объём становится чётным. Поэтому наибольший объём будет чётным, и он не больше $1+2+$ $+3+4+5=15$, значит, максимум 14 л. Пример переливаний – см. таблицу, где на каждом шаге цветом указаны два участвующих в следующем переливании ведра.

1	2	3	4	5
1	4	1	4	5
1	8	1	0	5
2	7	1	0	5
2	7	2	0	4
4	7	0	0	4
8	7	0	0	0
1	14	0	0	0

3. Ответ: d1 и e1. Решим задачу для начальной позиции слона в любой клетке поля. Если начальная позиция выигрышная для Вовы, будем ставить в этой клетке плюс, иначе минус (см. рисунок). Если слон стоит в верхней горизонтали, то Петя не может сходить и Вова выигрывает. Если Петя за один ход может перенести слона на верхнюю горизонталь, то такая клетка проигрышная для Вовы, поставим в неё минус. Тогда из клеток d3 и e3 можно сходить только в клетки с минусом, и если этот ход сделает Петя, то потом Вова передвинет слона на верхнюю горизонталь и выиграет; поставим в d3 и e3 плюс. Из клеток b1, c1, c2, d2, e2, f2, f1, g1 Петя может переставить слона в клетки d3 и e3 и выиграть, как описано ранее, так что ставим там минус. Наконец, из клеток d1 и e1 можно перенести слона только на клетки с минусом, откуда d1 и e1 выигрышные для Вовы.

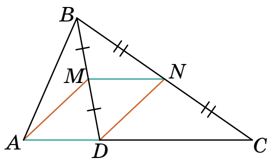
8	+	+	+	+	+	+	+	+
7	–	–	–	–	–	–	–	–
6	–	–	–	–	–	–	–	–
5	–	–	–	–	–	–	–	–
4	–	–	–	–	–	–	–	–
3	–	–	–	+	+	–	–	–
2	–	–	–	–	–	–	–	–
1	–	–	–	+	+	–	–	–
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*

4. Ответ: 511. Одно из двух последовательных чисел, на которые не делится A, должно быть чётным, запишем его в виде $2^k \cdot p$, где p – нечётное число, $k \geqslant 1$. Если $p>1$, то 2^k и p – меньше $2^k \cdot p$ (хотя бы на 2), и, по условию, A делится на оба эти числа. Но тогда A делится и на их произведение $2^k \cdot p$ (так как 2^k и p взаимно просты). Противоречие, значит, $p=1$, то есть одно из двух наших последовательных чисел равно 2^k. Аналогично доказывается, что второе число – степень какого-то простого числа. Выясним, чему может равняться k. Так как $2^k \leqslant N$ и $N \leqslant 2017$, то $2^k \leqslant 1024=2^{10}$. Но соседние с 2^{10} числа $1023=3 \cdot 341$ и $1025=25 \cdot 41$ – не степени простого числа. Следующая возможная степень двойки – $512=2^9$. Но соседние с ней числа $511=7 \cdot 73$ и $513=27 \cdot 19$ тоже не подходят. А следующая степень двойки $256=2^8$ нам подходит, так как число 257 простое. Мы получили, что 2^k не больше 256 (а соседнее число не больше 257). Значит, A не делится на 256 или меньшую степень двойки, и тем более не делится на 512, откуда $N \leqslant 511$.

Но для $N=511$ нужное нам число A существует: перемножим 128 и все нечётные числа от 3 до 511, кроме 257. Проверьте, что A делится на все числа от 2 до 511, кроме 256 и 257.

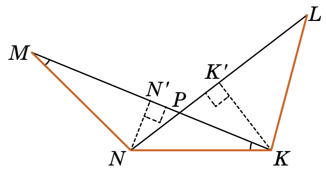
8 класс

1. Ответ: $1:2$. MN – средняя линия в треугольнике BDC, значит, отрезок MN параллелен отрезку DC и в 2 раза короче его. Тогда, в силу параллельностей $MN \parallel AD$ и $AM \parallel DN$, $AMND$ – параллелограмм, откуда $MN=AD$. Тогда $AD:DC=MN:2MN=1:2$.



2. Ответ: 1. Возведём оба равенства в квадрат ($a^2-2a+1=b^2$ и $b^2-2b+1=a^2$), сложим их, сократим равные слагаемые в обеих частях, разделим на 2 и получим, что $a+b=1$. Легко проверить, что любая пара таких чисел подходит.

3. Опустим перпендикуляры NN' и KK' на основания равнобедренных треугольников MNK и NKL. Тогда в прямоугольных треугольниках NPN' и KPK' (с $\angle NPN'=\angle KPK'=60°$) катеты PN' и PK' равны соответственно половинам гипотенуз NP и KP. Учитывая, что N' и K' – середины MK и NL соответственно, получаем, что $MP=MN'+N'P=$ $=KN'+N'P=KP+PN'+N'P=KP+2PN'=KP+$ $+PN$. Аналогично $PL=KP+PN$, то есть $MP=$ $=PL$, что и требовалось.



4. Ответ: не сможет. Пусть такая раскраска существует. Если две клетки разных цветов имеют общую сторону, то обведём её. Посмотрим на центр любого квадрата 2×2. Так как квадрат не одноцветный и не «шахматный», из его центра должны выходить ровно две обведённые стороны. Отсюда два следствия. Во-первых, обведённые стороны разбиваются на непересекающиеся циклы. Во-вторых, через каждый внутренний узел доски проходит один цикл. Раскрасим узлы доски в шахматном порядке. Тогда в каждом цикле чётное число узлов, так как узлы разных цветов в нём чередуются. С другой стороны, общее число узлов $9 \cdot 9=81$ нечётно – противоречие.