Две стрелки из трёх

Игорь Акулич

– Жаль, Даня, что ты один, а не четверо.

– Это почему?

– Потому что тогда я мог бы сказать: «Качайте меня!». А в одиночку ты не справишься...

– А, Федя, я понимаю, в чём дело! Что, нашёл ещё одну задачу про стрелки часов?

– Именно! Причём почти новую – ей пять лет всего. Вот послушай[1]:

Дима увидел в музее странные часы (рис.1). Они отличаются от обычных часов тем, что на их циферблате нет цифр и вообще непонятно, где у часов верх; да ещё секундная, минутная и часовая стрелки имеют одинаковую длину. Какое время показывали часы?

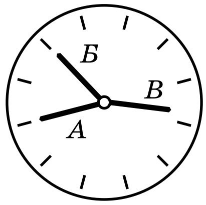

Рис.1

(Стрелки *А* и *Б* на рисунке смотрят ровно на часовые отметки, а стрелка *В* чуть-чуть не дошла до часовой отметки.)

– И чего тут решать? Мы давно отработали и отточили универсальный способ решения задач про стрелки. Всё начинается одинаково: примем полный оборот за единицу. Тогда если часовая стрелка прошла путь x, то минутная – $12x$, а секундная – $720x$... Ну, и дальше конкретизируем применительно к данной задаче. Это как дрова колоть: поленья разные, а топор один.

– Вижу, Даня, и ты в философию ударился. Хотя не спорю: такой подход непременно приведёт к успеху (проверено многократно!). Но здесь можно гораздо проще: прежде чем топором махать, подумать логически.

– А над чем тут думать? Всё вроде ясно...

– Ну, вот скажи: две стрелки показывают точно на часовые отметки. Какие это могут быть стрелки?

– Ясно какие. Возможны три варианта: часовая и минутная, часовая и секундная, ну и, наконец, минутная и секундная.

– А теперь подумай: если часовая стрелка указывает точно на часовое деление (неважно, какое), то куда в этот момент должны указывать остальные две стрелки?

[1] Это задача с XXIV Математического праздника, автор задачи – Д. Шноль.

– Вертикально вверх, на число «12» – куда же ещё?

– Вот именно – то есть *обе* остальные стрелки должны показывать тоже на часовую отметку (и даже на одну и ту же!). А у нас третья стрелка *не дошла* до часовой отметки. Значит, что?

– Значит, часовая стрелка не может указывать на часовую отметку! Два варианта из трёх – исключаем.

– То-то же. Получается, что на часовые отметки указывают непременно минутная и секундная стрелки, а часовая не дошла до отметки. Ну, а теперь дальше: если минутная стрелка указывает на часовую отметку, то после начала часа прошло заведомо целое число минут, и потому секундная стрелка, хочешь не хочешь, показывает на отметку «12». Тогда получается всего-то два варианта. Либо секундная стрелка – это стрелка *А*, тогда стрелка *Б* – минутная, и показывает она на отметку «2», а часовая стрелка *В* находится между отметками «6» и «7». Так что текущее время – десять минут седьмого. Во втором случае секундная стрелка – это стрелка *Б*, тогда стрелка *А* – минутная, и показывает она на отметку «10», а часовая стрелка *В* находится между отметками «4» и «5». Поэтому текущее время – без десяти пять. Имеется два ответа!

– И вовсе не два! В условии же ясно сказано: стрелка *В* всего лишь чуть-чуть не дошла до часовой отметки. Поэтому первый ответ придётся отбросить.

– Чуть-чуть не считается! Для одного чуть-чуть – это один градус, для другого – пол-оборота! Хотя, по сути, ты, конечно, прав (и автор задачи тоже). Но зато здесь возникает обобщающий вопрос: сколько раз в сутки две стрелки указывают точно на разные часовые отметки, а третья – не совпадает с часовой отметкой?

– Думаю, ситуация здесь почти такая же. На часовые отметки должны указывать минутная и секундная стрелки, при этом секундная показывает всегда на отметку «12», а минутная – на любую отметку от «1» до «11» включительно. Каждому из таких 11 возможных вариантов могут соответствовать 12 положений часовой стрелки (между «1» и «2», между «2» и «3», и так далее, вплоть до между «12» и «1»). Итого за полусутки получаем $11 \times 12 = 132$ момента времени, а за сутки – вдвое больше, или 264.

– Хорошо. Но зачем ограничиваться *часовыми* отметками? На том же циферблате имеется аж 60 *минутных* отметок. Сколько раз в сутки две стрелки указывают точно на *разные минутные* отметки, а третья – не совпадает с минутной отметкой?

– Бр-р-р... Там же море вариантов! Утонем.

– Почему же? Давай рассуждать так же, как раньше. Пусть часовая стрелка указывает на какую-то минутную отметку. Но если часовая стрелка, стартовав от начала (вертикального положения), передвигается на одну минутную отметку, то минутная стрелка проходит за то же время 12 минутных делений, и тоже укажет на минутную отметку! А секундная стрелка будет показывать на отметку «12» – куда ей деваться-то? Значит, и здесь та стрелка, что не совпадает ни с какой минутной отметкой, – *часовая*. Минутная указывает на какую-то минутную отметку, а секундная – на отметку «12». Минутных отметок всего 60, и потому мы эти 60 должны умножить...

– Стоп, притормози! *Не каждое* положение минутной стрелки разрешено! Если при этом часовая стрелка тоже совпадёт с какой-то минутной отметкой, то такое недопустимо!

– Да, ты прав. Поэтому, учитывая соотношение скоростей часовой и минутной стрелок (в 12 раз), придётся отбросить пять «разрешённых» отметок минутной стрелки из 60 возможных: 0, а также 12, 24, 36 и 48 минут. И потому остаётся 55 положений минутной стрелки за каждый час. Ну, а за полсуток имеем те же 12 «интервалов» для местонахождения часовой стрелки, и потому получаем в итоге $55 \times 12 = 660$ моментов времени (а за сутки соответственно 1320).

– Знаешь, у меня тут в голове возникла похожая задача: а сколько раз в сутки *ровно одна* стрелка показывает на часовую (либо минутную) отметку?

– Э... подумать надо. Давай пока отложим этот вопрос. Скажем, на завтра.

– Что поделаешь, давай.

К читателям. А мы давайте не будем откладывать. Попробуйте ответить на последний вопрос (тем более что это не очень-то сложно). Если всё-таки не получится – читайте ответ в следующем номере.

Художник Алексей Вайнер