



25 февраля и 11 марта 2018 года прошёл весенний тур XXXIX Международного математического Турнира Городов. Приводим задачи базового и сложного вариантов для 8–9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов.

Базовый вариант

1. На доске 6×6 расставили 6 не угрожающих друг другу ладей. Затем каждое не занятое ладьёй поле покрасили по такому правилу: если ладьи, угрожающие этому полю, находятся от него на одинаковом расстоянии, то это поле закрашивают в красный цвет, а если на разном – то в синий цвет. Могли ли все не занятые поля оказаться

- (1 балл) красными;
- (2 балла) синими?

Игорь Акулич

2 (4 балла). На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили точку K , а на катете AC – точку L так, что $AK = AC$, $BK = LC$. Отрезки BL и CK пересекаются в точке M . Докажите, что треугольник CLM равнобедренный.

Егор Бакаев

3. В квадрате 4×4 расставили целые числа так, что в каждом из восьми рядов (строках и столбцах) сумма чисел одна и та же. Семь чисел известны, а остальные скрыты (см. рисунок). Можно ли по имеющимся данным восстановить

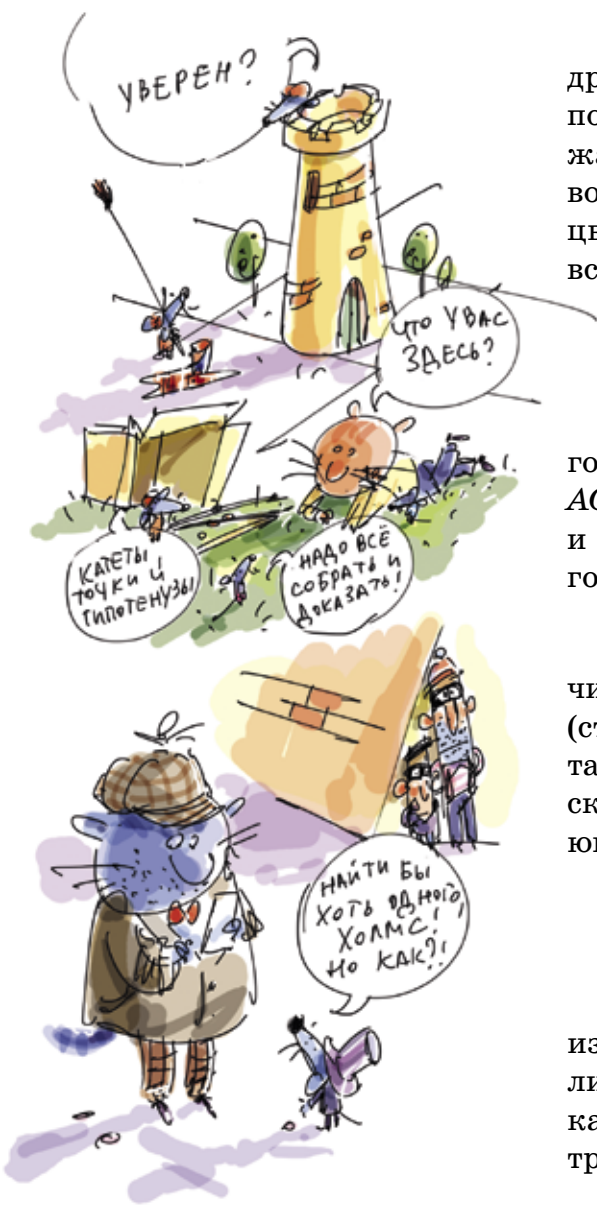
1	?	?	2
?	4	5	?
?	6	7	?
3	?	?	?

- (2 балла) хотя бы одно скрытое число;
- (2 балла) хотя бы два скрытых числа?

Егор Бакаев

4 (4 балла). Даны три натуральных числа. Каждое из данных чисел делится на наибольший общий делитель остальных двух. Наименьшее общее кратное каждых двух из данных чисел делится на оставшееся третье. Обязательно ли все три числа равны?

Борис Френкин



5 (5 баллов). На плоскости отметили 30 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и провели 7 красных прямых, не проходящих через отмеченные точки. Могло ли случиться, что каждый отрезок, соединяющий какие-то две отмеченные точки, пересекается хоть с одной красной прямой?

Павел Кожевников

Сложный вариант

1 (4 балла). В строку выписаны 39 чисел, не равных нулю. Сумма любых двух соседних чисел положительна, а сумма всех чисел отрицательна. Каков знак произведения всех чисел?

Борис Френкин

2 (5 баллов). У Аладдина есть несколько одинаковых слитков золота, и иногда он просит джина увеличить их количество. Джин добавляет тысячу таких же слитков, но после этого берёт за услугу ровно половину от получившейся общей массы золота. Могли Аладдин оказаться в выигрыше после десяти таких просьб, если ни один слиток не пришлось распиливать?

Александр Перепечко

3 (6 баллов). Существуют ли такие 2018 положительных несократимых дробей с различными натуральными знаменателями, что знаменатель разности любых двух из них (после приведения к несократимому виду) меньше знаменателя любой из исходных 2018 дробей?

Максим Дидин

4 (6 баллов). Точка O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC , AN – его высота. Точка P – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую CO . Докажите, что прямая HP проходит через середину стороны AB .

Егор Бакаев





5 (8 баллов). На улице дома стоят друг напротив друга, всего 50 пар. На правой стороне улицы расположены дома с чётными натуральными номерами, на левой – с нечётными натуральными номерами, номера возрастают от начала улицы к концу на каждой стороне, но идут не обязательно подряд (возможны пропуски). Для каждого дома на правой стороне улицы нашли разность между его номером и номером дома напротив, и оказалось, что все найденные числа различны. Наибольший номер дома на улице равен n . Найдите наименьшее возможное значение n .

Максим Дидин



6 (10 баллов). В стране рыцарей (всегда говорят правду) и лжецов (всегда лгут) за круглым столом сидят в вершинах правильного десятиугольника 10 человек, среди которых есть лжецы. Путешественник может встать куда-то и спросить сидящих: «Каково расстояние от меня до ближайшего лжеца из вас?» После этого каждый отвечает ему. Какое минимальное количество вопросов должен задать путешественник так, чтобы гарантированно узнать, кто за столом лжецы? (Посторонних рядом нет, на стол вставать нельзя. Людей считайте точками. Все, включая путешественника, могут точно измерить любое расстояние.)

Максим Дидин

7 (12 баллов). В некотором государстве сложение и вычитание обозначаются знаками «!» и «?», но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но про вычитание вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. К примеру, выражение $a?b$ обозначает одно из следующих: $a - b$, $b - a$ или $a + b$. Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные a , b и скобки есть и используются как обычно. Объясните, как с помощью них и знаков «!», «?» записать выражение, которое гарантированно равно $20a - 18b$.

Николай Белухов

