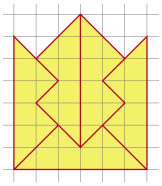
НАШ КОНКУРС («Квантик» № 3, 2018)

31. *Разрежьте фигурку на рисунке на 5 одинаковых частей.*



Пример см. на рисунке.

32. *Количество цифр в числе N в 2018 раз меньше, чем само число N. Чему может равняться N? (Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.)*

Ответ: 8072, 10090. Пусть запись числа N состоит из k цифр, тогда $N = 2018k$. Подставим первые несколько k:

k	1	2	3	4	5	6
N	2018	4036	6054	8072	10090	12108

Числа $k = 4$ и 5 подходят. Если $k = 6$, то в числе $2018k$ менее k цифр. Если дальше увеличивать k на 1, то к числу $2018k$ прибавляется 2018, и так как в нём не меньше 5 цифр, то число цифр увеличится не больше, чем на 1. Значит и дальше в числе $2018k$ будет менее k цифр.

33. *Два игрока по очереди нанизывают красные, синие и зелёные кольца на 33 стержня. У каждого игрока неограниченное количество колец каждого типа. За ход игрок нанизывает какое-либо кольцо на какой-то стержень. Запрещается помещать красное кольцо непосредственно на синее, а синее – непосредственно на зелёное. Также на стержне не может быть более одного кольца каждого цвета. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?*

Ответ: первый. Разобьём стержни на пары, оставив один стержень, назовём его C, без пары. Пусть первый игрок первым ходом наденет на C зелёное кольцо. Когда соперник наденет второе, красное кольцо, на C – первый наденет на C третье, синее кольцо. Если же соперник надевает кольцо на один из парных стержней, первый отвечает симметричным ходом – надевает кольцо того же цвета на парный стержень. Итак, у первого игрока всегда есть ответный ход, и он не проиграет. Поскольку ничья невозможна, проиграет второй.

34. *а) Петя пишет в каждой клетке доски 100×100 буквы А или Б так, чтобы всего на доске их было поровну. Вася передвигает по этой доске фишку, сдвигая её всё время только в соседнюю клетку и каждый раз записывая, на какой букве она стоит. Всегда ли Вася может так поставить фишку и так обойти ею все клетки ровно по одному разу, чтобы полученная последовательность букв одинаково читалась слева направо и справа налево?*

б) То же самое для доски 101×101, букв А на одну больше, чем букв Б.

Ответ: не всегда в обоих пунктах. а) Петя может раскрасить доску в шахматном порядке и на чёрных клетках написать *А*, а на белых *Б*. На соседних клетках стоят разные буквы, поэтому как бы Вася ни обошёл доску, буквы будут чередоваться: *АБАБ...АБАБ*. Всего клеток чётное число, поэтому последняя и первая буквы разные. Значит, последовательность справа налево читается по-другому.

б) Поставим буквы в шахматном порядке так, что букв *А* на одну больше, чем букв *Б*. Буквы чередуются при любом обходе и получается симметричная строка *АБА...АБА*. Выберем любую пару клеток с разными буквами и поменяем буквы местами. Тогда при любом обходе получается строка, которая отличается от *АБА...АБА* в двух местах: в одном *А* заменено на *Б*, в другом – *Б* на *А*. Эти места не будут симметричны друг другу, поэтому строка слева направо и справа налево читается по-разному.

35. *– Поделил я как-то одно натуральное число на другое с остатком, – рассказывал Петя Коле. – Когда же я поделил квадрат первого числа на второе, остаток оказался вдвое больше, чем был при первом делении. А когда я поделил куб первого числа на второе, остаток стал уже втрое больше.*

– Ну, это ты заливаешь, такого не может быть! – воскликнул Коля. – Вот со мной действительно была похожая история. Я тоже поделил одно натуральное число на другое с остатком. И когда я поделил куб первого числа на второе, остаток оказался вдвое больше первоначального, а когда поделил квадрат первого числа на второе, остаток стал втрое больше.

– Теперь уже ты сочиняешь! – заявил Петя.

Кто мог быть прав в каждом случае?

В первом случае прав Коля: то, что описывает Петя, невозможно. Если два числа делятся на третье, то можно каждое умножить на целый множитель (для каждого свой) и сложить или вычесть, и результат также будет делиться на третье число. Пусть Петя делил число k на m. По условию, k^2 и $2k$, а также k^3 и $3k$ дают одинаковые остатки при делении на m. Значит, k^2-2k и k^3-3k делятся на m. Умножим первое выражение на k и вычтем второе. Разность $(k^3-3k)-k(k^2-2k)=2k^2-3k$ делится на m. Из этой разности вычтем удвоенное первое выражение: $2(k^2-2k)$. Результат $(2k^2-3k)-2(k^2-2k)=k$ тоже делится на m. Значит, k делится на m, а по условию k даёт ненулевой остаток. Противоречие.

Во втором случае Коля мог быть прав. Например, 3 делится на 21 с остатком 3, и при делении на 21 число $3^3=27$ даёт остаток 6, а число $3^2=9$ даёт остаток 9.

ДВЕ СТРЕЛКИ ИЗ ТРЁХ
(«Квантик» № 4, 2018)

Сначала будем решать две задачи одновременно. Если на часовую (соответственно минутную) отметку указывает ровно одна стрелка, допустим, минутная, то с полуночи прошло целое число минут, то есть секундная стрелка указывает на отметку «12» – противоречие. Если же на отметку указывает часовая стрелка, то снова секундная стрелка указывает на отметку «12», потому что часовая стрелка указывает на отметку каждые 60 (соответственно 12) минут. Значит, единственная стрелка, показывающая на какую-то отметку – секундная.

А далее задачу придётся снова «раздвоить».

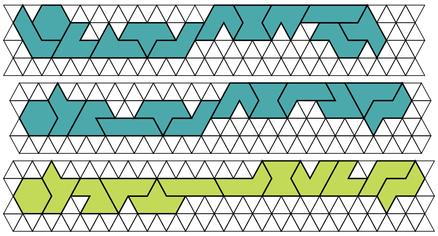
Задача для часовых отметок. Если секундная стрелка указала на отметку «12», а минутная не указывает ни на какую часовую отметку, то и часовая стрелка не указывает. Каждый час таких моментов $60-12=48$, мы не учитываем моменты, когда минутная стрелка показывает кратное 5 число минут. Всего часов 24, поэтому получаем $24\cdot48$ моментов.

Если секундная стрелка указала на отметку, но не на «12», то остальные стрелки не указывают на отметки. На каждую из 11 таких отметок секундная стрелка указывает $24\cdot60$ раз за сутки – столько же, сколько минут в сутках. Значит, ответ $24\cdot48+24\cdot60\cdot11=16\,992$.

Задача для минутных отметок. Если секундная стрелка указала на отметку «12», то минутная стрелка указывает на отметку – противоречие. Если нет, то время составляет нецелое число минут, а значит, остальные стрелки не казывают на отметки. На каждую из 59 подходящих нам отметок секундная стрелка указывает $60\cdot24$ раз за сутки – столько же, сколько минут в сутках. Значит, ответ $59\cdot60\cdot24$.

ГЕКСАТРИОН: НОВЫЕ ЗАДАЧИ СТАРОЙ ГОЛОВОЛОМКИ (**«Квантик» № 4, 2018**)

1. Рекорд на сегодня – фигура длины 21,5.

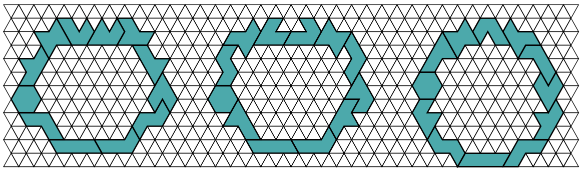


19,5

20,5

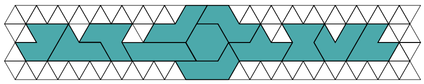
21,5

2. Рекорд на сегодня – фигура площади 95.



89 91 95

Примечание. В прошлом номере на с. 23 в средней картинке рисунка 3 допущена опечатка. Приносим свои извинения. Вот верная картинка:



ПРОЖЕКТОРЫ НАД АРЕНОЙ
(«Квантик» № 4, 2018)

Возможно любое число прожекторов. Укажем, какие фигуры освещают прожекторы.

Пусть m – общее число пар прожекторов. Впишем в круг-арену m-угольник. Тогда арена составлена из этого m-угольника и m сегментов. Каждому сегменту сопоставим свою пару прожекторов. Пусть каждый прожектор освещает m-угольник и те сегменты, которые сопоставлены парам, в которых есть этот прожектор. Проверим, что условия задачи выполнены.

Действительно, каждый прожектор освещает выпуклую фигуру. Каждый сегмент освещён двумя прожекторами, а m-угольник – всеми прожекторами. Если выключить любые два прожектора, то сегмент, сопоставленный их паре, не будет освещён. А если выключить любой один прожектор, то всё будет освещено.

КОСМИЧЕСКИЙ ТЕАТР ТЕНЕЙ

Если бы мы видели на этом фото только ярко освещённый Солнцем серп Луны, то однозначного ответа дать не смогли бы. В такой ориентации лунный серп бывает недалеко от экватора, как утром, так и вечером. Однако мы ясно различаем на фото не только освещённую Солнцем, но и ночную сторону Луны, её так называемый «пепельный свет». Положение лунных морей говорит нам о том, что ярко освещён восточный край лунного диска. Следовательно, на видимой стороне Луны начинается день. Значит, это растущий, молодой серп, который виден по вечерам.

На вторую задачу ответ дан в самой статье: источником пепельного света Луны служит Земля, то есть ночную часть видимого полушария Луны освещает солнечный свет, отразившийся от Земли. Поэтому на вопрос «Где ночи темнее: на видимой стороне Луны или на обратной?» можно смело отвечать «На обратной», поскольку с неё не видна Земля, которая ночью подсвечивает видимую сторону Луны.

КВАДРАТНЫЙ ПРОЦЕНТ

Если один угол равен 90, то два других можно обозначить за $45+x$ и $45-x$. Их произведение равно $90\cdot(45-x)\cdot(45+x)=90\cdot(45^2-x^2)$ и не больше $90\cdot45\cdot45=182\,250$. Значит, если произведение углов больше 182 250, то треугольник не прямоугольный.

САРА БЕРНАР, ДЖОАКИНО РОССИНИ, ХЕЛЬМУТ НЬЮТОН

Выдумана история про Ньютона. На самом деле мираж – это оптическое явление, и его вполне можно сфотографировать. Фотографии миражей вы легко найдёте в интернете.

XXXIX ТУРНИР ГОРОДОВ. ВЕСЕННИЙ ТУР, 8 – 9 классы

Базовый вариант

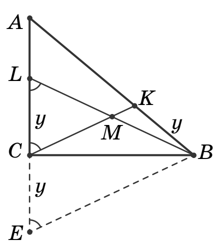
1. Ответ: могли. Клетка будет красной, если бьющие её ладьи стоят на одной диагонали, и синей – в противном случае.

а) Расставим ладей на главной диагонали.

б) Ладьи должны быть не бьющими друг друга ферзями (см. рисунок).

		Л			
					Л
	Л				
				Л	
Л					
			Л		

2. Треугольник AKC равнобедренный, так как $AK=AC$. На прямой AC за точку C отложим отрезок CE равный CL. Тогда $AE=AC+CE=AC+CL=AK+KB=AB$, то есть треугольник ABE тоже равнобедренный. Треугольники AKC и ABE равнобедренные с одинаковым углом при вершине, значит, углы при основании равны. Поэтому $\angle ACK=\angle AEB$. Так как угол C прямой и $CE=CL$, то треугольники CEB и CLB равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle CEB=\angle CLB$. У треугольника CLM углы при стороне CL равны, значит, он равнобедренный.



3. а) **Ответ:** можно. Пусть в правом нижнем углу находится число x. Сумма чисел в двух средних столбцах равна сумме чисел в двух крайних строках. Поэтому $4+5+6+7=1+2+3+x$, то есть $x=16$.

б) **Ответ:** нельзя. Рассмотрим любой подходящий набор из оставшихся восьми ещё неизвестных чисел. Добавим к каждому из них по 1. Суммы чисел в рядах увеличатся на 2, значит, останутся равными. Следовательно, ни одно из этих восьми чисел восстановить нельзя.

4. Ответ: обязательно. Пусть эти числа x, y, z. Докажем, что любое простое число p входит в разложение каждого числа в одной и той же степени – это и будет значить, что числа равны. Пусть p входит в x в степени α, в y – в степени β, в z – в степени γ. Можем считать, что $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$. Поскольку x делится на НОД(y,z), то $\alpha\geqslant\beta$, а поскольку НОК(x,y) делится на z, то $\beta\geqslant\gamma$. Значит, $\alpha=\beta=\gamma$, что и требовалось.

5. Ответ: не могло. Отрезок не пересекает ни одну из 7 прямых, если и только если его концы находятся по одну сторону от каждой прямой, то есть лежат в одной области из тех, на которые разбивают плоскость 7 прямых. Покажем, что областей не могло быть больше чем 29, а значит, какие-то две точки попали в одну область.

Сначала проведём одну прямую, а потом будем добавлять прямые по одной и следить, как меняется число областей.

Пусть уже проведено k прямых. Тогда следующая прямая пересечёт не более k прямых, а значит, разделится точками пересечения не более чем на $k+1$ кусков (отрезков и лучей). Каждый кусок лежит целиком в одной области и делит её на две части. Значит, при проведении $(k+1)$-й прямой добавляется не более $k+1$ областей. Самая первая прямая добавляет одну область к уже существующей одной – всей плоскости. Тогда 7 прямых делят плоскость не более чем на $2+2+3+4+5+6+7$ областей.

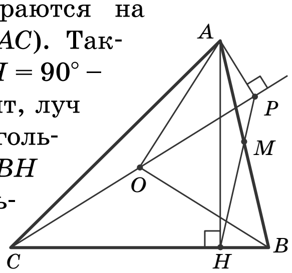
Сложный вариант

1. Ответ: плюс. Рассмотрим любое число с нечётным номером. Остальные числа разбиваются на пары соседних. Значит, их сумма положительна, поэтому рассматриваемое число отрицательно. Числа с чётными номерами должны быть положительными, чтобы суммы в парах с ними были положительными. Поэтому выписано 20 отрицательных чисел и 19 положительных, их произведение положительно.

2. Ответ: не мог. Пусть у Аладдина было $1000 + x$ слитков. После первой просьбы их станет $1000+\frac{x}{2}$, а после десяти просьб – $1000+$ $+\frac{x}{2^{10}}$. Следовательно, x делится на 1024. Так как $x \geqslant -1000$, то $x \geqslant 0$. Поэтому количество слитков не увеличилось.

3. Ответ: существуют. Выберем любые 2018 положительных несократимых дробей со знаменателями $b_1 > b_2 > \ldots > b_{2018} > 0$. Выберем дробь вида $\frac{1}{d}$, знаменатель d которой больше b_1b_2 и взаимно прост с $b_1b_2\ldots b_{2018}$. Прибавим к каждой из 2018 дробей новую дробь. Полученные суммы будут искомыми, поскольку их знаменатели в несократимом виде будут равны db_i, а у разностей – не больше b_1b_2.

4. Так как треугольник остроугольный, то центр O описанной окружности лежит внутри треугольника. Поэтому $\angle AOC$ и $\angle ABC$ – центральный и вписанный углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Тогда $\angle B=\frac{1}{2}\angle AOC=$ $=90°-\angle OCA=90°-\angle PCA=\angle PAC=\angle PHB$ (последнее равенство следует из очевидной вписанности четырёхугольника $APHC$, в котором два прямых угла опираются на одну и ту же сторону AC). Также $\angle MAH = 90° - \angle MBH = 90° -$ $-\angle MHB=\angle MHA$. Значит, луч HP отсекает от прямоугольного треугольника ABH равнобедренные треугольники BMH и AMH. Поэтому M – середина AB.



5. Ответ: 197. Подойдём к первому дому на какой-то стороне. Пойдём вдоль улицы, потом около некоторого дома перейдём к противоположному дому, потом продолжим идти вдоль улицы, потом опять у некоторого дома перейдём к противоположному и дойдём до конца.

Пока мы шли вдоль улицы, номер каждого следующего дома был хотя бы на 2 больше предыдущего. Значит, разница номеров домов в начале и в конце улицы не меньше, чем $2\cdot 49$ плюс разности номеров в двух парах домов, у которых мы перешли улицу. Покажем, что можно выбрать начальную сторону улицы и две пары домов так, чтобы эти две разности в сумме давали не меньше 98. Тогда мы получим, что у последнего дома номер не меньше $1+98+98=197$.

Действительно, все разности нечётны и различны, поэтому найдутся две, которые отличаются хотя бы на 98. Улицу нужно пересекать как раз у пар домов с этими разностями. Если меньшая из двух разность расположена ближе к началу улицы, чем бóльшая, то нужно начинать обход с чётной стороны. Тогда при переходе улицы она войдёт в сумму с минусом, а бóльшая – с плюсом. Если меньшая разность дальше от начала, то нужно начинать с нечётной стороны.

Пример. Пусть на правой стороне номера равны 2, 4, 6, ..., 98, 100, а на левой – 1, 5, 9, ..., 193, 197. Разности равны $1, -1, -3, \ldots, -97$ и различны, наибольший номер дома равен 197.

6. Ответ: 2. Первый вопрос зададим из произвольной точки. Если все ответы на него одинаковы, то все сидящие за столом – лжецы, поскольку рыцарь и лжец дают разные ответы.

В противном случае найдутся соседи, ответившие по-разному. Встанем в середину дуги между ними. Так как хотя бы один из двоих – лжец, то до ближайшего лжеца расстояние известно. Тогда те, кто его назовёт, – рыцари, а остальные – лжецы.

За один вопрос определить лжецов не получится. Пусть, когда путешественник задал вопрос, самое маленькое расстояние до сидящих было a, а следующее по величине – b. Если сидящие на расстоянии a ответят b, а остальные ответят a, то хотя бы два случая возможны: когда сидящие на расстоянии a – все рыцари, остальные – лжецы, и когда всё наоборот.

7. Легко проверить, что $(a\ ?\ a)\,!\,(a\ ?\ a)=0$. Поэтому можно использовать обозначение «0». Убедитесь также, что $(a\ ?\ 0)\ ?\ (0\ ?\ b) = a + b$, $0\,!\,((0\ ?\ (a\ ?\ 0))\,!\,0)=-a$. Таким образом, мы научились складывать и брать противоположное число. Значит, можно получить и $20a-18b$.

С 26 июня по 2 июля 2018 года на базе отдыха «Берендеевы Поляны» (Костромская область) пройдёт XXIV Турнир математических боёв имени А.П. Савина для школьников, закончивших 6 – 9 классы. Регистрация – до 25 мая 2018 года.
Подробности по ссылке tursavin.ru/info.html