ЖУРНАЛ

КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 5

май 2018

КОСМИЧЕСКИЙ ТЕАТР ТЕНЕЙ

КВАДРАТНЫЙ ПРОЦЕНТ

БУМАЖНАЯ МОДЕЛЬ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Enter

№ 5 | май 2018

Издаётся Московским центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

ДОРОГИЕ ДРУЗЬЯ!

НАЧАЛАСЬ ПОДПИСКА НА II ПОЛУГОДИЕ!

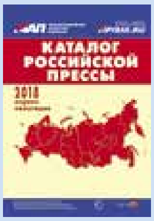
Подписаться на журнал «КВАНТИК» вы можете в любом отделении связи Почты России и через интернет!

КАТАЛОГ «ГАЗЕТЫ. ЖУРНАЛЫ» АГЕНТСТВА «РОСПЕЧАТЬ»

Индекс **84252** для подписки на полгода или на несколько месяцев полугодия

Самая низкая цена на журнал!

«КАТАЛОГ РОССИЙСКОЙ ПРЕССЫ» МАП



Индекс **11346** для подписки на полгода или на несколько месяцев полугодия

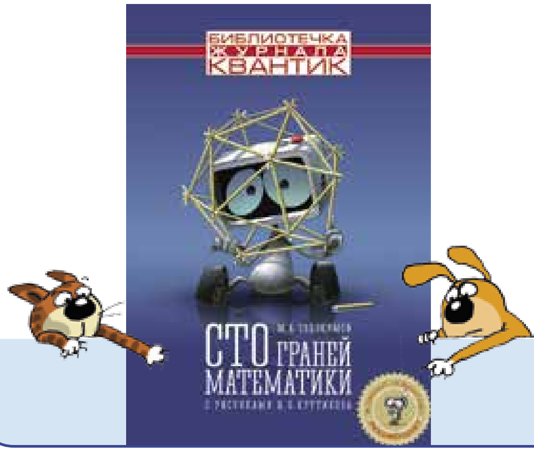
По этому каталогу также можно подписаться на сайте **vipishi.ru**

Жители дальнего зарубежья могут подписаться на сайте **nasha-pressa.de**

Подробнее обо всех способах подписки, о продукции «Квантика» и о том, как её купить, читайте на сайте **kvantik.com**

Журнал «КВАНТИК» – лауреат **IV ВСЕРОССИЙСКОЙ ПРЕМИИ «ЗА ВЕРНОСТЬ НАУКЕ»** в номинации **«ЛУЧШИЙ ДЕТСКИЙ ПРОЕКТ О НАУКЕ»**

Вышла первая книга серии «Библиотечка журнала «Квантик»:
Михаил Евдокимов
«СТО ГРАНЕЙ МАТЕМАТИКИ»
с рисунками **Николая Крутикова**



Книгу, как и другую продукцию «Квантика», можно приобрести в интернет-магазине **kvantik.ru**

Кроме журнала редакция «Квантика» выпускает также альманахи, плакаты и календари загадок

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 05, май 2018 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор: С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, В. А. Дрёмов, Е. А. Котко, И. А. Маховая, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas-07
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Мария Усеинова

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях связи Почты России:
▪ Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)
▪ «Каталог Российской прессы» МАП (индексы **11346** и **11348**)
Онлайн-подписка по «Каталогу Российской прессы» на сайте **vipishi.ru**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 5000 экз.
Подписано в печать: 12.04. 2018
Отпечатано в типографии ООО «ТДДС-Столица-8»
Тел.: (495) 363-48-84
http://capitalpress.ru
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

СОДЕРЖАНИЕ

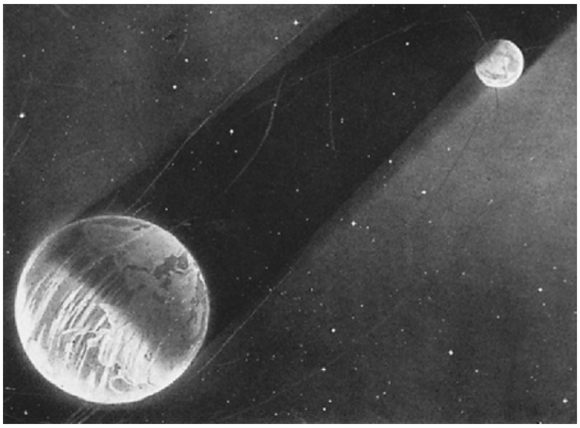
ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

Владимир Сурдин

КОСМИЧЕСКИЙ ТЕАТР ТЕНЕЙ

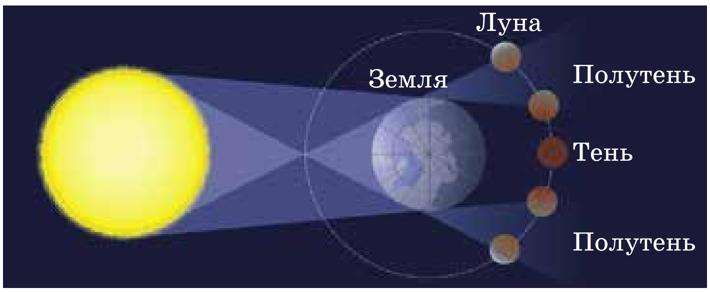
Каждый знает, что тень – это пространство, закрытое от яркого света. Мы любим устраивать театр теней на стене комнаты или на белом экране, если рядом есть яркая лампа. Сложил пальцы по-особому, и на стене возник силуэт волка или зайчика.

В космосе тоже есть театр теней: его демонстрируют нам планеты и их спутники. Например, наша Земля иногда отбрасывает свою тень на Луну, а Луна – на Землю.

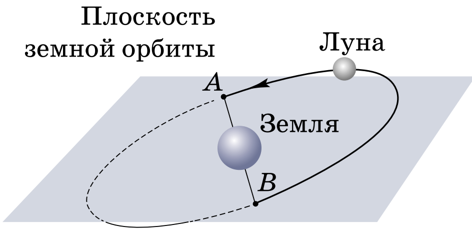


Такие моменты астрономы называют *затмениями*. Например, затмение Солнца – это когда Луна отбрасывает свою тень на поверхность нашей планеты и закрывает от некоторых жителей Земли солнечный диск. Лунная тень невелика, она не может накрыть всю Землю, поэтому полное солнечное затмение в этот момент видят не все земляне, а только те, кому повезло попасть в тень Луны.

Случаются и лунные затмения – это когда Земля своей тенью закрывает от Солнца Луну. Тогда диск Луны сильно меркнет и на несколько часов становится почти невидимым. Земная тень велика, поэтому Луна легко погружается в неё целиком.



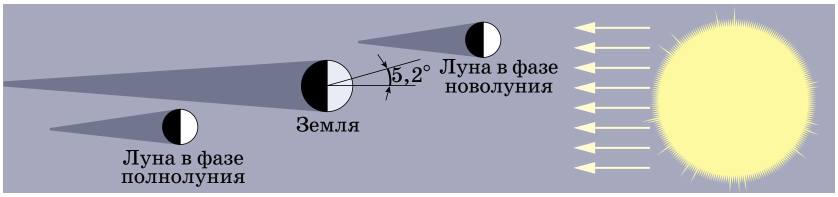
Как известно, Луна – спутник Земли. Двигаясь по своей орбите, она завершает оборот вокруг Земли примерно за месяц. Казалось бы, Луна должна попадать в тень Земли каждый месяц. И это в самом деле было бы так, если бы плоскость лунной орбиты совпадала с плоскостью земной орбиты, где находится и Солнце. Но эти две плоскости не совпадают: между ними угол примерно в 5°. Поэтому лунные и солнечные затмения случаются редко: только в те дни, когда Луна приближается к плоскости земной орбиты. Линия, по которой плоскости земной и лунной орбит пересекаются, называется *линией узлов*.



Взаимное расположение плоскости лунной орбиты и плоскости орбиты Земли. *AB* – линия узлов

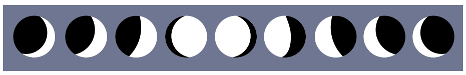
Когда Луна и Солнце находятся на линии узлов по одну сторону от Земли, может произойти солнечное затмение, а когда они располагаются на линии узлов по разные стороны от Земли – лунное. Иными словами, затмения происходят только в те дни, когда Луна пересекает плоскость земной орбиты. Поэтому астрономы называют её *плоскостью эклиптики*, а годичный путь Солнца – *эклиптикой* (лат. *ecliptica*, от др.-греч. ἔκλειψις – затмение). Если Луна далеко от эклиптики, затмений не жди. Если же Луна приблизилась к эклиптике, оказавшись вблизи одного из узлов своей орбиты, и при этом Солнце тоже оказывается на линии узлов, то будет затмение.

Центр земной тени всегда лежит на эклиптике, а угловой радиус этой тени в районе лунной орбиты составляет для наблюдателя на Земле около 0,7°. Угловой радиус лунного диска около 0,25°. Следовательно, если Луна удаляется от эклиптики более чем на 1°, она не попадает в тень Земли. Именно поэтому Луна чаще проходит мимо земной тени, чем попадает в неё. По этой же причине и лунная тень далеко не всегда попадает на Землю. Вот почему мы наблюдаем затмения не ежемесячно, а лишь несколько раз в году.



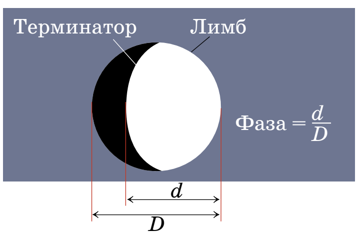
Однако все знают, что за короткое время внешний вид Луны на нашем небе сильно меняется. То она полная (то есть круглая), то четвертинкой, то узким месяцем вроде серпа. Эти изменения называют сменой лунных фаз. Обычно цикл лунных фаз начинают отсчитывать от момента новолуния, когда лунный диск вообще не виден, поскольку Луна находится между Солнцем и Землёй, так что сторона Луны, обращённая к Земле, не освещена Солнцем.

Через пару дней после новолуния по вечерам после захода Солнца низко у западного горизонта появляется тонкий лунный серп. День ото дня он растёт, и через неделю мы уже видим половину освещённого Солнцем диска Луны. Это *фаза первой четверти*. Почему же «четверти», если видна половинка диска? Да потому что неделя – это четверть месяца, то есть четверть полного периода смены лунных фаз.



Так происходит смена фаз Луны в Северном полушарии – слева направо, а в Южном – справа налево

Полнолуние (слева) и первая четверть (справа)

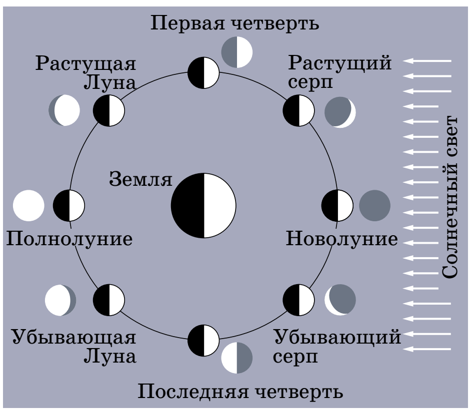


Фаза Луны или планеты выражается числом $F = d/D$, где d – ширина освещённой части, а D – диаметр диска

Край видимого лунного диска астрономы называют *лимбом*. Глядя на любую планету в телескоп, мы тоже видим её как диск и тоже называем его край лимбом. А линию, отделяющую дневную часть диска от ночной, называют *терминатором*. На планетах, Луне и других спутниках это граница дня и ночи. Фазу Луны или любой другой планеты можно выразить числом, равным отношению ширины освещённой части диска к его полному диаметру. Именно это число указывают в календарях под названием *фаза*.

Некоторые люди думают, что в смене лунных фаз виновата тень Земли, которая попеременно закрывает то левую, то правую половинку лунного диска. Но это, конечно, не так. Ведь мы уже знаем, что земная тень редко попадает на Луну, а фазы непрерывно меняются в течение каждого месяца. Значит, не тень Земли закрывает от нас разные части лунного диска. А чья же тогда это тень?

Да всё очень просто! У Луны, как и у любой планеты, всегда есть два полушария – дневное, освещённое Солнцем, и ночное, не освещённое. Обходя вокруг Земли за месяц, Луна постепенно демонстрирует нам оба свои полушария: в полнолуние – освещённое, дневное, а в новолуние – неосвещённое, ночное. В остальные дни – часть освещённого и часть неосвещённого. Так что в новолуние мы не видим поверхность нашего спутника вовсе не потому, что на него упала тень Земли. Можно сказать, что в этот момент повёрнутое к Земле лунное полушарие находится в тени... самой Луны.



Фазы Луны. Показано её движение по орбите вокруг Земли (вид со стороны Северного полюса, Луна движется против часовой стрелки). Рядом с орбитой показан внешний вид Луны для земного наблюдателя в Северном полушарии в соответствующие моменты месяца.

Художник Мария Усеинова

А теперь – задание. Посмотрите на фото ниже. Какой серп Луны сфотографирован на нём – растущий (молодой) или убывающий (старый)?

Фото: Европейская южная обсерватория

Это задание простое. А вот ещё одно, посложнее. На этом же фото кроме ярко освещённого Солнцем узкого лунного серпа мы ясно видим и ночную сторону Луны, тускло освещённую… чем? Это явление называют *пепельным светом Луны*. А где же источник пепельного света? Попробуйте представить себя в этот момент на Луне, но на её ночной стороне. У вас ночь, Солнце под горизонтом. А что вы видите в небе над собой? Откуда льётся на вас тусклый свет?

Как видите, всё очень просто: на Земле бывает полнолуние, а на Луне – «полноземелие». При этом ночное освещение от Земли на Луне намного сильнее, чем от Луны на Земле. Ведь диск Земли на лунном небе в несколько раз больше, чем лунный диск на нашем небосводе, да и отражаются солнечные лучи от Земли намного лучше, чем от лунной поверхности. В итоге ночная поверхность видимой стороны Луны освещается Землёй так ярко, что там без труда ночью можно гулять без фонарика и даже книжки читать. На Земле в полнолуние тоже можно гулять (но осторожно, а то споткнётесь!), а вот книжки при полной Луне читать не советую – можно глаза испортить.

МОНЕТЫ КАРИБСКОГО МОРЯ

До 1917 года острова Санта-Крус, Сент-Томас и Сент-Джон в архипелаге Малых Антильских островов в Карибском море принадлежали Дании и назывались Датская Вест-Индия (сейчас это Американские Виргинские острова). С 1849 года там чеканили *центы* и *далеры*, а в 1904 году ввели две новые единицы – *биты* и *франки*. Вот оборотные стороны медной, серебряной и золотой монет этого времени:

Сколько центов было в далере? Сколько битов во франке?

Автор Михаил Гельфанд
Художник Артём Костюкевич

Константин Кохась

КВАДРАТНЫЙ ПРОЦЕНТ

– Поскольку гостей будет много, – сказал дятел Спятел, – нужно заранее подумать о том, чтобы всё место в этой прекрасной квадратной комнате было использовано как можно более эффективно.

– Главное – это обеденный стол, – напомнила Огрыза.

– Со столом-то как раз никаких проблем, – отмахнулся дятел Спятел, – мы поставим мой большой квадратный стол прямо в центре команты. Между прочим, он действительно не маленький. Сторона стола составляет 20 процентов от стороны комнаты.

– Не может быть, – сказал таракан Кузька, – ведь если сторона стола равна 20 процентам, то площадь стола равна $20 \cdot 20 = 400$ процентам. Этот стол сюда просто не поместится – он в 4 раза больше комнаты!

– Не преувеличивай, – сказала Огрыза. – У тебя получается, что сторона стола меньше стороны комнаты, а площадь стола больше.

– Против фактов не попрёшь! – возразил Кузька. – А $20 \cdot 20 = 400$ и всё тут!

– Ну что ты как маленький, – дятел Спятел посмотрел на Кузьку сверху вниз. – Вот, допустим, сторона стола равна 20 метрам, так ты тогда скажешь что его площадь составляет $20 \cdot 20 = 400$ метров?

– Конечно, 400! Только нет, не 400 метров, а 400 квадратных метров!

– Вот именно! Квадратных метров! Поэтому если сторона стола равна двадцати процентам, то площадь стола составляет 400 квадратных процентов!

– К-к-квадратных процентов?

– Естественно! Не кубических же.

– Что такое квадратный процент? – тихонько спросил Кузька у Огрызы. – Разве такое бывает?

– Ну, если надо, бывает, – ответила Огрыза, – хотя обычно обходятся без них.

Один квадратный процент – это один процент от одного процента, или иными словами – это одна десятитысячная.

– Вот это да! – удивился Кузька. – А зачем они нужны?

– Да они в общем-то и не нужны! Но при желании их можно использовать в вычислениях вроде твоего подсчёта площади.

– Я должен это хорошенько обдумать, – заявил Кузька и спрятался под диван.

Огрыза и дятел Спятел продолжили подготовку к празднику.

Прошло довольно много времени, пока Кузька, наконец, не вылез из-под дивана.

– Я всё понял про проценты и изобрёл потрясающую вещь! – сообщил он. – Я придумал признак непрямоугольности треугольника!

– П-п-признак? Неп-п-прямоугольности? – сказал, запинаясь, дятел Спятел и сел на диван.

– Именно так! – гордо сказал Кузька. – Признак непрямоугольности!

– Мне кажется, кто-то из нас спятил, – пробормотала Огрыза. – А при чём тут проценты?

– Проценты тут совершенно ни при чём. Но они… они вдохновили меня!

– И что же это за признак?

– Треугольник заведомо является непрямоугольным, если произведение его углов больше 182 250 кубических градусов!

– Кубических градусов, – повторил дятел Спятел.

– Естественно! Не квадратных же! – воскликнул Кузька.

Задача для читателей.

Докажите Кузькин признак непрямоугольности треугольника.

Алексей Панов,
Дмитрий Ал. Панов

БУМАЖНАЯ МОДЕЛЬ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Часть 1

В 1978 году Ю. В. Матиясевич опубликовал в журнале «Квант»[1] статью под названием «Модели многогранников». В ней было рассказано о конструкторе для сборки многогранников, придуманном американским архитектором Фредом Бассетти. С помощью этого конструктора мы познакомимся с плоскостью Лобачевского, собрав её бумажную модель.

Добавим, что Фред Бассетти (1917–2013) – известный американский архитектор, по его проектам построено много красивых зданий. Свой конструктор он запатентовал в 1961 году[2], и впоследствии этот конструктор продавался под названием «Flexagons».

Изготовление конструктора

В состав конструктора входят два типа деталей – резиновые колечки и многоугольные грани. В качестве колечек мы рекомендуем банковские резинки диаметром 4 см. Заготовки для граней вырезаются из листа ватмана – плотной белой бумаги. Мы будем собирать многогранники только из правильных треугольных граней, так что лист ватмана нужно разметить на правильные треугольники со стороной 12,5 см и нарезать их в большом количестве (рис. 1).

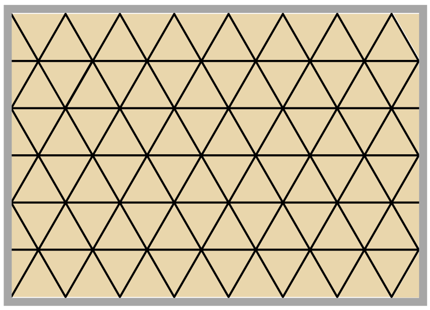


Рис. 1. Лист ватмана разбит на треугольники. Такое разбиение, где в каждой вершине сходятся шесть правильных треугольников, называется ещё правильным треугольным паркетом

Один из полученных треугольников превратим в шаблон, проделав в нём три дырочки в точках пересечения трёх прямых, удалённых от сторон треугольника на 1 см (рис. 2). Далее карандашом размечаем все остальные треугольники, расставляя в каждом по три точки через дырки в шаблоне.

[1] См. «Квант» №1 за 1978 г., kvant.ras.ru/1978/01/

[2] https://patents.google.com/patent/US3003260

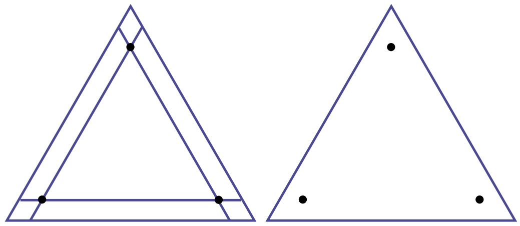


Рис. 2. Шаблон с тремя дырочками, ширина полосок в нём равна 1 см; справа – размеченный треугольник со сторонами 12,5 см

Теперь берём в руки ножницы и начинаем вырезать заготовки граней. Сначала в каждой из вершин треугольника, ориентируясь на отмеченную точку, вырежем по маленькому четырёхугольнику (рис. 3, слева), а потом отогнём боковые полоски вверх и хорошо прогладим сгибы. Дальше отрежем ещё шесть маленьких треугольничков, а потом и ещё шесть поменьше (рис. 3, справа).

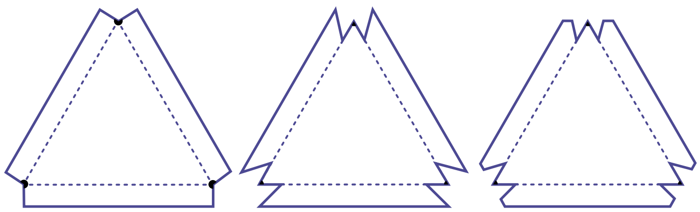


Рис. 3. Фазы изготовления заготовок

На рисунке 4 мы видим две уже готовые бумажные детали конструктора. Там же показан механизм соединения этих деталей-граней – они прикладываются друг к другу отогнутыми рёбрами, на которые накидывается слегка растянутая резинка.

Рис. 4. Соединение граней

А теперь можно приступать к большой сборке.

Тетраэдр → Октаэдр → Икосаэдр → Плоскость → ?

Начнём со сборки тетраэдра, у которого в каждой вершине сходятся по три грани, затем соберём октаэдр, в вершинах которого сходятся по четыре грани,

потом икосаэдр, у которого в вершинах сходятся по пять граней (рис. 5).

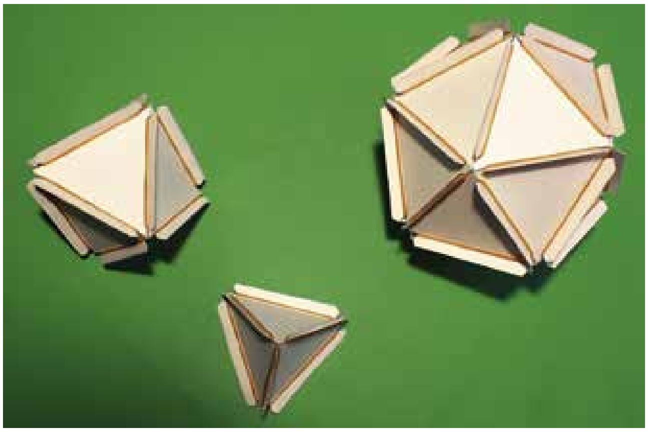


Рис. 5. Тетраэдр, октаэдр, икосаэдр

Из них больше всего похож на сферу наш двадцатигранный икосаэдр, и его вполне можно было бы назвать бумажной моделью сферы.

Попробуйте теперь собрать многогранник, у которого в каждой вершине сходятся шесть треугольных граней. Тут нас ждёт первый сюрприз: оказывается, что в результате получается не многогранник, а многогранная поверхность, и если не останавливаться, то это будет бесконечная поверхность – целая плоскость. Это можно проверить экспериментальным путём – в процессе сборки, а можно просто ещё раз посмотреть на рисунок 1, чтобы понять, в чём здесь дело.

Бумажная модель плоскости Лобачевского

А теперь посмотрим, что скрывается за знаком «?» в заголовке предыдущего раздела. Для этого при сборке многогранника в каждой вершине будем соединять по семь треугольных граней. Здесь опять возникнет бесконечная многогранная поверхность (рис. 6), и, как

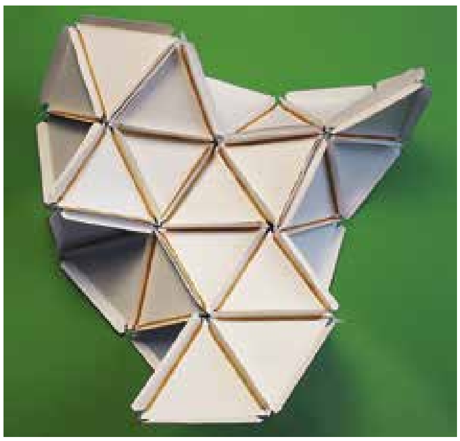


Рис. 6. Бумажная модель плоскости Лобачевского. При сборке она начинает сильно извиваться

мы увидим, она будет служить неплохой моделью для плоскости Лобачевского.

На рисунке 6 собран небольшой кусок поверхности, но уже видно, что с ростом числа граней она начинает сильно извиваться и целиком не сможет разместиться в нашем трёхмерном пространстве – в некоторый момент её сборка застопорится. Таким же свойством обладает и настоящая плоскость Лобачевского, её тоже нельзя разместить в трёхмерном пространстве, – это известная теорема Гильберта.

Изучение нашей модели начнём с того, что попытаемся нарисовать на ней прямую. Вот как это можно сделать. Сначала на выбранной треугольной грани с помощью линейки проведём отрезок прямой. Для продолжения отрезка на соседнюю грань выровняем обе грани, чтобы они лежали в одной плоскости, и с помощью линейки продолжим наш отрезок на соседнюю грань. Это первый шаг, но, повторяя его раз за разом, можно неограниченно продолжить отрезок в одну сторону, и так же в другую – получится бесконечная прямая. Но не всегда, а только если мы ни в какой момент не попадём в вершину треугольника. В вершине нам не удастся одновременно выровнять все семь треугольников. Максимум можно выровнять пять треугольников, причём двумя разными способами. Тем самым, прямая продолжается неоднозначно.

Удобно считать, что сторона поверхности, видная на рисунке 6, это изнанка, а на противоположной гладкой стороне будем рисовать, как это сделано на рисунке 7. Наша модель благодаря резинкам обладает упругими свойствами, заставляющими её изгибаться, поэтому, проводя прямую, желательно прижимать конструкцию линейкой.

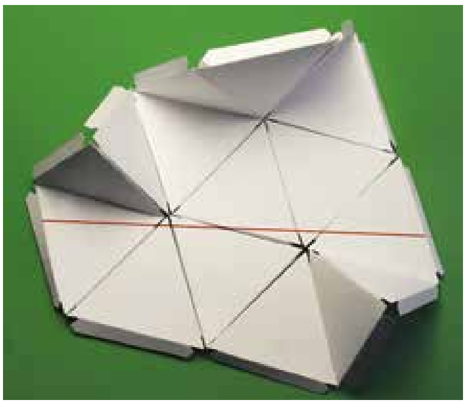


Рис. 7. Проведение прямой

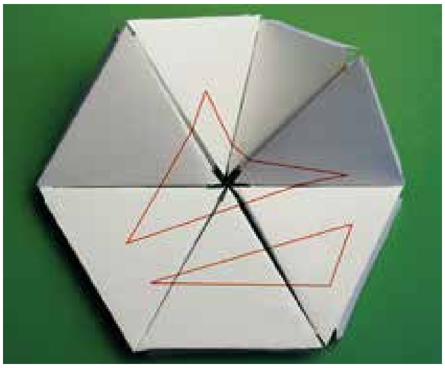


Рис. 8. В одном треугольнике сумма углов равна 180°, в другом 120°

После того как мы научились рисовать прямые, можно строить треугольники. На маленьком кусочке нашей модели с одной вершиной посередине, где сходятся семь граней, нарисованы два треугольника (рис. 8).

Возьмите транспортир и измерьте на своей модели сумму углов в каждом из них. В том треугольнике, который не содержит вершины, сумма углов равна 180°, как в обычном треугольнике на обычной плоскости. В другом треугольнике сумма углов равна 120°. Если внутри треугольника будут содержаться две вершины поверхности, то сумма углов в нём будет равна 60°. А треугольников, содержащих внутри себя больше двух вершин, на нашей поверхности просто не существует.

На настоящей плоскости Лобачевского происходят аналогичные вещи. Во-первых, там сумма углов любого треугольника меньше 180°, во-вторых, площадь любого треугольника не может превосходить некоторого фиксированного числа. Второй факт как раз соответствует тому, что у нас внутри треугольника не может лежать более двух вершин.

А теперь о самом интересном – о параллельных прямых, то есть о прямых, которые не пересекаются. Посмотрите на рисунок 9, где нарисованы две

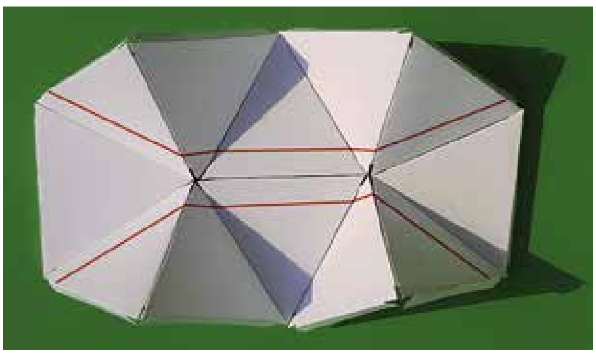


Рис. 9. Эти параллельные прямые наиболее близки в одном месте и расходятся при удалении от него

непересекающиеся – параллельные прямые. Видно, что в некоторый момент они расположены близко друг к другу, но при удалении и в одну и в другую сторону от этого места они начинают расходиться. Это происходит на нашей поверхности, но это также характерное поведение параллельных прямых на плоскости Лобачевского.

Правда, на нашей модели есть и исключения из этого правила. Если в полосе между параллельными прямыми нет ни одной вершины поверхности, то эти прямые всё время остаются на одном и том же расстоянии друг от друга (рис. 10).

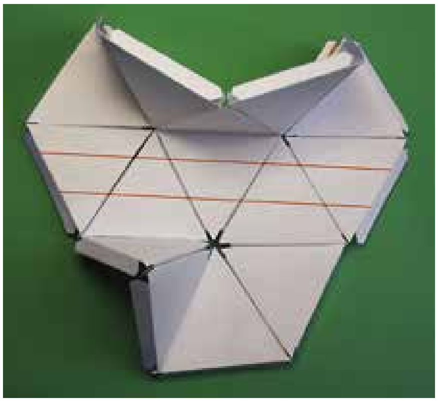


Рис. 10. Эти две параллельные прямые всё время остаются на одинаковом расстоянии друг от друга

И наконец, о самом главном – о том, что на обычной плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно всегда провести одну и только одну прямую, параллельную данной, а на плоскости Лобачевского это не так. Не так это и на нашей модели, и рисунок 11 отчётливо демонстрирует это.

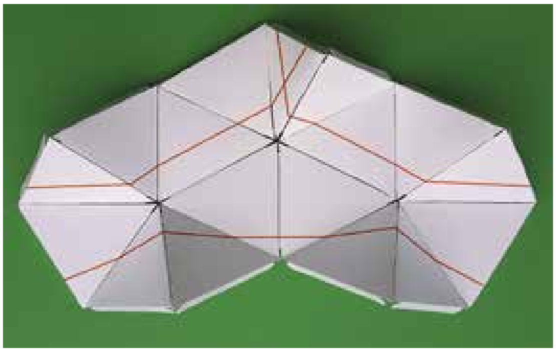


Рис. 11. Через точку вне нижней прямой проходят две прямые, параллельные данной (не пересекающие её)

На этом мы закончим короткий обзор нашей модели, а в следующем номере скажем несколько слов о том, как она связана с правильными паркетами на плоскости Лобачевского.

Фото: Валентина Асташкина
Художник Алексей Вайнер

Сергей Федин

САРА БЕРНАР, ДЖОАКИНО РОССИНИ, ХЕЛЬМУТ НЬЮТОН

Две из этих историй известны, а одна полностью придумана. Надо догадаться, какая именно. Вычислить её можно по какой-нибудь нелепости, несуразности, спрятанной в тексте. Попробуйте!

САРА БЕРНАР

Наверное, самой знаменитой актрисой за всю историю была француженка Сара Бернар, жившая в конце XIX–начале XX века.

В одном из спектаклей она исполняла роль нищенки. Одетая в лохмотья, актриса подошла к краю сцены и трагическим голосом произнесла:

– Идти больше нет сил. Я умираю от голода.

При этом она всплеснула руками, и лохмотья сползли с её запястий. И тут поражённые зрители увидели золотой браслет, который «божественная Сара» забыла снять в гримёрной. В зале засмеялись. Кто-то из зрителей насмешливо крикнул:

– Продайте браслет!

Но актриса не растерялась:

– О, не смейтесь над несчастной женщиной! – укоризненно произнесла она. – Золото фальшивое.

Зрители по достоинству оценили находчивость Сары Бернар бурными аплодисментами.

ДЖОАКИНО РОССИНИ

Выдающийся итальянский композитор Джоакино Россини жил двести лет тому назад, во времена Пушкина. За свою долгую жизнь он написал 30 опер, в том числе знаменитую на весь мир оперу «Севильский цирюльник». Россини был одним из самых популярных композиторов того времени, и его даже называли итальянским Моцартом.

Однажды кто-то спросил композитора, кто его самые лучшие друзья.

В ответ Россини назвал имена двух богатейших людей того времени – Моргана и Ротшильда.

– А, понимаю, – усмехнулся вопрошающий, – вы выбрали таких богатых друзей, чтобы иногда занимать у них деньги.

Россини широко улыбнулся:

– Ничего подобного! Они – мои друзья, потому что никогда не просили денег взаймы у меня.

ХЕЛЬМУТ НЬЮТОН

Однажды знаменитый фотограф Хельмут Ньютон летел на лёгком самолёте над пустыней Сахарой. Внезапно у самолёта отказал двигатель, и он сделал вынужденную посадку.

Выбравшись из кабины, фотограф с радостью заметил среди бескрайних песков удаляющегося верблюда. «Вот оно, спасение!» – подумал Ньютон и пошёл вслед за верблюдом, понимая, что тот приведёт его к людям.

Но беднягу поджидал неприятный сюрприз. Оглядевшись по сторонам, он увидел точно такого же верблюда, который шёл в другую сторону. «Так, ясно. Один из этих верблюдов – мираж!» – догадался Ньютон, не зная, за кем из них идти.

И тут он вспомнил про свой фотоаппарат.

– У техники не бывает миражей! – воскликнул Ньютон и мгновенно сфотографировал каждого из верблюдов. На дисплее фотоаппарата проявился только один. «Этот и есть настоящий», – решил Хельмут и двинулся вслед за ним.

Вскоре он вышел к оазису и был спасён. А фразу знаменитого фотографа «У техники не бывает миражей» полушутя стали называть четвёртым законом Ньютона.

Художник Капыч

Сергей Федин

Семнадцать буковок

Несколько лет назад один знакомый поэт пригласил меня на свой творческий вечер. «Серёжа, – обратился он ко мне перед своим выступлением, – не могли бы вы открыть вечер и сказать буквально пять слов». Я согласился, вышел на сцену и сказал: «Меня просили сказать пять слов». После этого, довольный собой – ещё бы, в моём выступлении было ровно пять слов! – я... спустился со сцены. Однако, оглядев зал, понял, что зрители не оценили моей шутки. Пришлось вернуться и говорить дальше.

А жаль! Ведь сказанная мной фраза была не простой, а *самоописывающейся* (или *рефлексивной*). Так называются фразы, которые сами себя описывают, то есть рассказывают не о ком-нибудь, а о себе. Вот, скажем, название этой заметки – в нём действительно 17 буковок. Значит, это тоже самоописывающаяся фраза! А можно и по-другому:

1. *В этом предложении есть ошибка, расположенная в канце.*

2. *Это предложение состояло бы из семи слов, если было бы на семь слов короче.*

3. *Вы находитесь под моим контролем, поскольку вы будете читать меня, пока не дочитаете до конца.*

4. *...Это предложение начинают и заканчивают три точки...*

Но все предыдущие примеры – только цветочки! Посмотри, какого самоописывающегося монстра, который дотошно подсчитывает все-все-все свои словечки, породил С. Табачников (он рассказал об этом в 6-м выпуске «Словечек» в «Квантике» №12 за 2012 год):

В этой фразе два раза встречается слово «в», два раза встречается слово «этой», два раза встречается слово «фразе», четырнадцать раз встречается слово «встречается», четырнадцать раз встречается слово «слово», шесть раз встречается слово «раз», девять раз встречается слово «раза», семь раз встречается слово «два», три раза встречается

слово «четырнадцать», три раза встречается слово «три», два раза встречается слово «девять», два раза встречается слово «семь», два раза встречается слово «шесть».*

А вскоре после появления этого словесного чудища мой хороший знакомый Игорь Акулич придумал ещё более «дотошную» фразу – в ней уже подсчитываются не только слова, но и знаки препинания:

Фраза, которую Вы читаете, содержит: два слова «Фраза», два слова «которую», два слова «Вы», два слова «читаете», два слова «содержит», двадцать пять слов «слова», два слова «слов», два слова «двоеточие», два слова «запятых», два слова «по», два слова «левых», два слова «и», два слова «правых», два слова «кавычек», два слова «а», два слова «также», два слова «точку», два слова «одно», два слова «одну», двадцать два слова «два», три слова «три», два слова «четыре», три слова «пять», четыре слова «двадцать», два слова «тридцать», одно двоеточие, тридцать запятых, по двадцать пять левых и правых кавычек, а также одну точку.

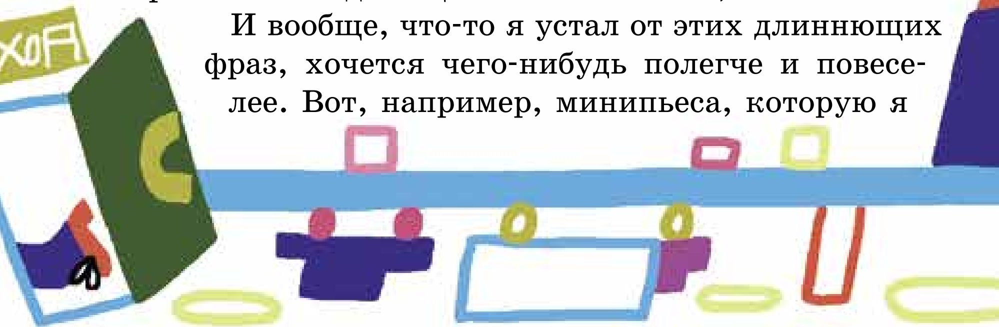
Потрясающе! Правда, проверять почему-то не хочется.

Ну, а завершает парад этих неуклюжих словесных гигантов ещё один монстрик, заботливо выращенный А. Ханяном. На этот раз подсчитываются уже не слова и всяческие препинаки (то есть знаки препинания), а буковки:

В этой фразе двенадцать В, две Э, семнадцать Т, три О, две Й, две Ф, семь Р, четырнадцать А, две З, девятнадцать Е, шестнадцать Д, семь Н, семь Ц, тринадцать Ь, восемь С, шесть М, пять И, две Ч, две Ы, три Я, три Ш, две П.

Остались сущие пустяки – придумать фразу, которая бы пересчитывала все свои буковки и знаки препинания, и ещё одну фразу – суперчемпиона! – которая бы описывала всё, что только можно: и слова, и слоги, и буквы, и препинаки. Но эти сложные нерешённые задачищи я оставляю тебе, читатель.

И вообще, что-то я устал от этих длиннющих фраз, хочется чего-нибудь полегче и повеселее. Вот, например, минипьеса, которую я



придумал специально для этой заметки. Действующие лица этого необычного представления – как раз самоописывающиеся фразы и фразочки.

***

РАЗГОВОР

Действующие лица: 1-я фраза, 2-я фраза, 3-я фраза, 4-я фраза, 5-я фраза, 6-я фраза, 7-я фраза.

1-я фраза: Мне так нравится шестая фраза, такая маленькая, но упругая и эмоциональная, с элегантным восклицательным знаком на конце, и так не похожая на меня, рыхлую и неуклюжую, перегруженную гадкими запятыми…

2-я фраза: А я люблю себя и особенно свои буковки – их у меня сорок девять.

3-я фраза: Э, матушка, во мне вон шестьдесят букв и три запятые, и то я не выпендриваюсь.

4-я фраза: А я вот всю жизнь страдала от своей незавершён

5-я фраза: Мне павизло ищо менше – мала таво што карявая и с ашипками так ещо и безсмысленая.

6-я фраза: Во мне семь слов, а сколько смысла!

7-я фраза: Я не знаю, есть ли во мне смысл, и сколько во мне букв, зато я знаю то, чего не знаете вы: после меня уже ничего не будет…

***

До сих пор речь у нас шла о самоописывающихся фразах. Однако самоописывающимися могут быть даже отдельные слова, а то и вовсе числа. Начну со слов. Полюбуйся:

ДВАДЦАТИОДНОБУКВЕННОЕ!

В этом замечательном «длинношеем» слове и впрямь 21 буква. Но его можно вытянуть ещё длиннее:

ДВАДЦАТИЧЕТЫРЁХБУКВЕННОЕ

И это не предел (попробуй придумать какое-нибудь своё самоописывающееся словечище). А поэт Герман Лукомников, наоборот, отыскал маленькое словечко, разговаривающее само с собой: ОДИННАДЦАТЬ. Он же однажды написал забавное стихотворение (скорее, стиховытворение), в котором строчки, как на перекличке, говорят о себе:

«я на самом на верху»
«я почти что наверху»
«я чуть выше серединки»
«я как раз посерединке»
«я чуть ниже серединки»
«ну а я почти внизу»
«а вот я совсем внизу»

Так и хочется пожалеть несчастную последнюю строчку...

Ну, ладно, самоописывающиеся фразы или слова – это ещё можно понять. Но как могут быть самоописывающимися числа? А вот как! Посмотри, например, на ничем вроде бы не примечательное число 2100010006. И, тем не менее, оно самое, что ни на есть самоописывающееся! Потому что первая цифра в нём равна количеству единиц в записи этого числа, вторая – количеству двоек, третья – количеству троек, ... десятая – количеству нулей.

Кстати, помнишь, мы говорили о палиндромах – так называются фразы, одинаково читаемые в обе стороны. Оказывается, палиндромы тоже могут быть самоописывающимися! По крайней мере, именно такой, полурусский-полуанглийский, пример придумал автор, укрывшийся под псевдонимом Willich:

LONDON – 2 «N», odno «L».

А ведь действительно, в слове Лондон две буквы «н» и одна «л», так что можно и по-русски: *ЛОНДОН – 2 «Н»*, одно *«Л»*. Да ещё и справа налево эта фраза читается так же. Здорово!

А ещё мы недавно говорили о разнобуквицах, то есть фразах, в которых ни одна буква не повторяется. Попробуем создать другого мутанта – самоописывающуюся разнобуквицу:

ЭЙ, ПОГЛЯДИ – 19 РАЗНЫХ БУКВ!

Здесь, как говорится, комментарии излишни – фраза сама всё о себе рассказывает. Вот бы научиться писать такие сочинения в школе, чтобы каждое предложение заодно ещё и объясняло, по каким правилам оно написано, почему в нём стоят запятые и так далее. Учительница, наверное, от восхищения в обморок упадёт... Тут уж вся надежда на тебя – попробуй, может быть, получится.

Художник Наталья Гаврилова

25 февраля и 11 марта 2018 года прошёл весенний тур XXXIX Международного математического Турнира Городов. Приводим задачи базового и сложного вариантов для 8–9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов.

Базовый вариант

1. На доске 6×6 расставили 6 не угрожающих друг другу ладей. Затем каждое не занятое ладьёй поле покрасили по такому правилу: если ладьи, угрожающие этому полю, находятся от него на одинаковом расстоянии, то это поле закрашивают в красный цвет, а если на разном – то в синий цвет. Могли ли все не занятые поля оказаться

а) (1 балл) красными;

б) (2 балла) синими?

Игорь Акулич

2 (4 балла). На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили точку K, а на катете AC – точку L так, что $AK=AC$, $BK=LC$. Отрезки BL и CK пересекаются в точке M. Докажите, что треугольник CLM равнобедренный.

Егор Бакаев

3. В квадрате 4×4 расставили целые числа так, что в каждом из восьми рядов (строках и столбцах) сумма чисел одна и та же. Семь чисел известны, а остальные скрыты (см. рисунок). Можно ли по имеющимся данным восстановить

1	?	?	2
?	4	5	?
?	6	7	?
3	?	?	?

а) (2 балла) хотя бы одно скрытое число;

б) (2 балла) хотя бы два скрытых числа?

Егор Бакаев

4 (4 балла). Даны три натуральных числа. Каждое из данных чисел делится на наибольший общий делитель остальных двух. Наименьшее общее кратное каждых двух из данных чисел делится на оставшееся третье. Обязательно ли все три числа равны?

Борис Френкин

5 (5 баллов). На плоскости отметили 30 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и провели 7 красных прямых, не проходящих через отмеченные точки. Могло ли случиться, что каждый отрезок, соединяющий какие-то две отмеченные точки, пересекается хоть с одной красной прямой?

Павел Кожевников

Сложный вариант

1 (4 балла). В строку выписаны 39 чисел, не равных нулю. Сумма любых двух соседних чисел положительна, а сумма всех чисел отрицательна. Каков знак произведения всех чисел?

Борис Френкин

2 (5 баллов). У Аладдина есть несколько одинаковых слитков золота, и иногда он просит джинна увеличить их количество. Джинн добавляет тысячу таких же слитков, но после этого берёт за услугу ровно половину от получившейся общей массы золота. Мог ли Аладдин оказаться в выигрыше после десяти таких просьб, если ни один слиток не пришлось распиливать?

Александр Перепечко

3 (6 баллов). Существуют ли такие 2018 положительных несократимых дробей с различными натуральными знаменателями, что знаменатель разности любых двух из них (после приведения к несократимому виду) меньше знаменателя любой из исходных 2018 дробей?

Максим Дидин

4 (6 баллов). Точка O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, AH – его высота. Точка P – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую CO. Докажите, что прямая HP проходит через середину стороны AB.

Егор Бакаев

XXXIX ТУРНИР ГОРОДОВ

ВЕСЕННИЙ ТУР, 8-9 КЛАССЫ

5 (8 баллов). На улице дома стоят друг напротив друга, всего 50 пар. На правой стороне улицы расположены дома с чётными натуральными номерами, на левой – с нечётными натуральными номерами, номера возрастают от начала улицы к концу на каждой стороне, но идут не обязательно подряд (возможны пропуски). Для каждого дома на правой стороне улицы нашли разность между его номером и номером дома напротив, и оказалось, что все найденные числа различны. Наибольший номер дома на улице равен n. Найдите наименьшее возможное значение n.

Максим Дидин

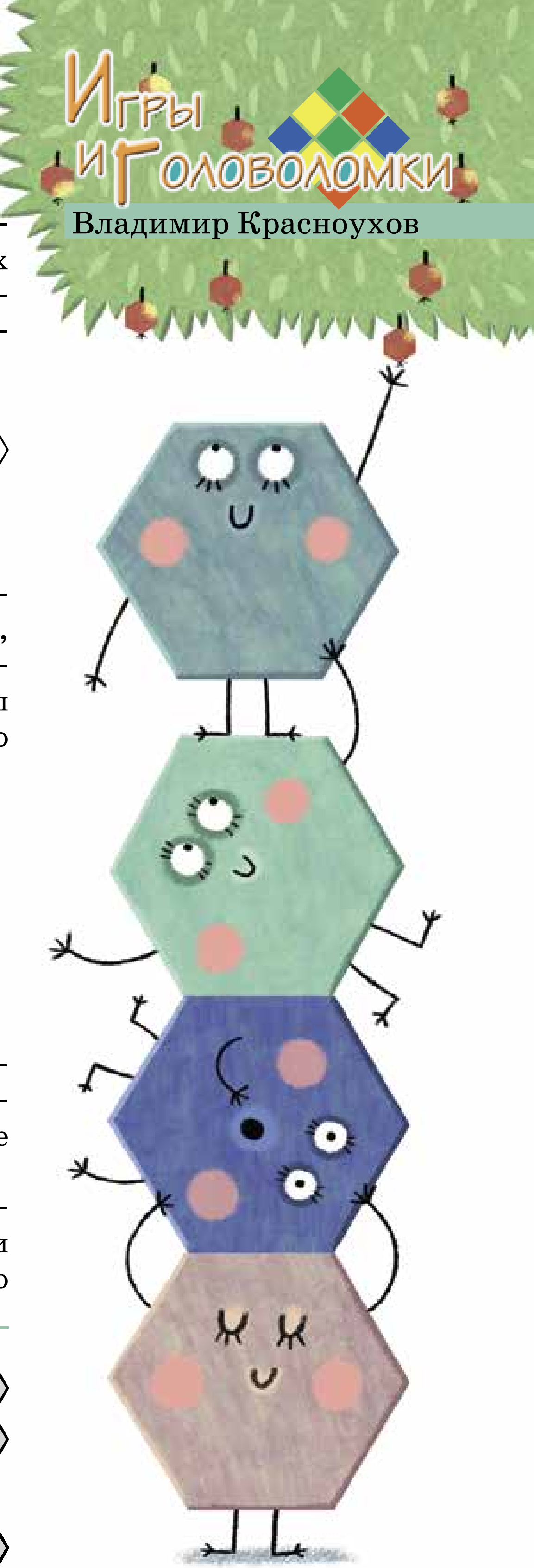
6 (10 баллов). В стране рыцарей (всегда говорят правду) и лжецов (всегда лгут) за круглым столом сидят в вершинах правильного десятиугольника 10 человек, среди которых есть лжецы. Путешественник может встать куда-то и спросить сидящих: «Каково расстояние от меня до ближайшего лжеца из вас?» После этого каждый отвечает ему. Какое минимальное количество вопросов должен задать путешественник так, чтобы гарантированно узнать, кто за столом лжецы? (Посторонних рядом нет, на стол вставать нельзя. Людей считайте точками. Все, включая путешественника, могут точно измерить любое расстояние.)

Максим Дидин

7 (12 баллов). В некотором государстве сложение и вычитание обозначаются знаками «!» и «?», но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но про вычитание вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. К примеру, выражение $a?b$ обозначает одно из следующих: $a-b$, $b-a$ или $a+b$. Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные a, b и скобки есть и используются как обычно. Объясните, как с помощью них и знаков «!», «?» записать выражение, которое гарантированно равно $20a-18b$.

Николай Белухов

Художник Сергей Чуб



БАШНИ ИЗ ТЕТРАГЕКСАГОНОВ
И ДРУГИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Владимир Красноухов

Тетрагексагоны – геометрические фигуры, состоящие из четырёх шестиугольников, соединённых сторонами (τετρα – четыре, гексагон – шестиугольник). Полный набор таких плоских двусторонних фигур состоит из семи различных элементов (рис. 1).

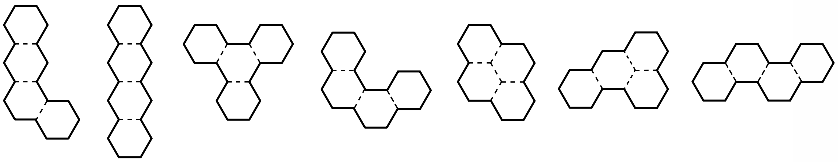


Рис. 1

Есть много задач на составление различных красивых фигур и узоров из тетрагексагонов. Например, используя весь набор элементов, соберите последовательно фигуры рисунка 2. Здесь и далее элементы можно как угодно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.

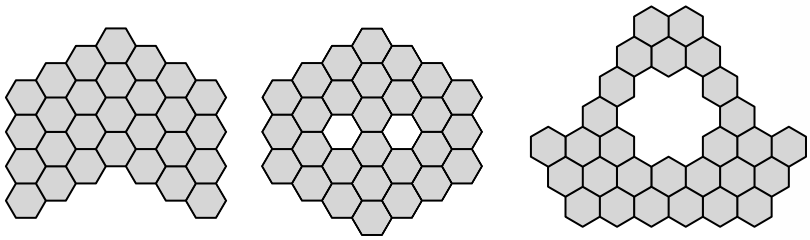
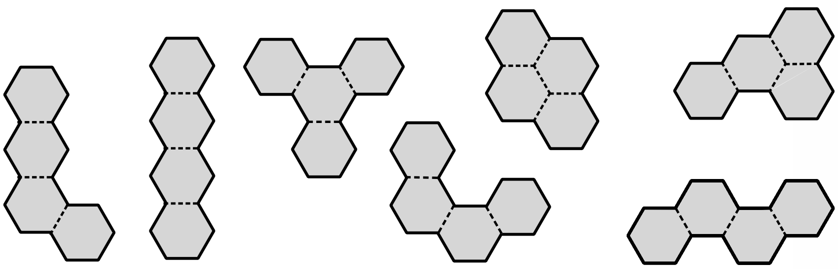
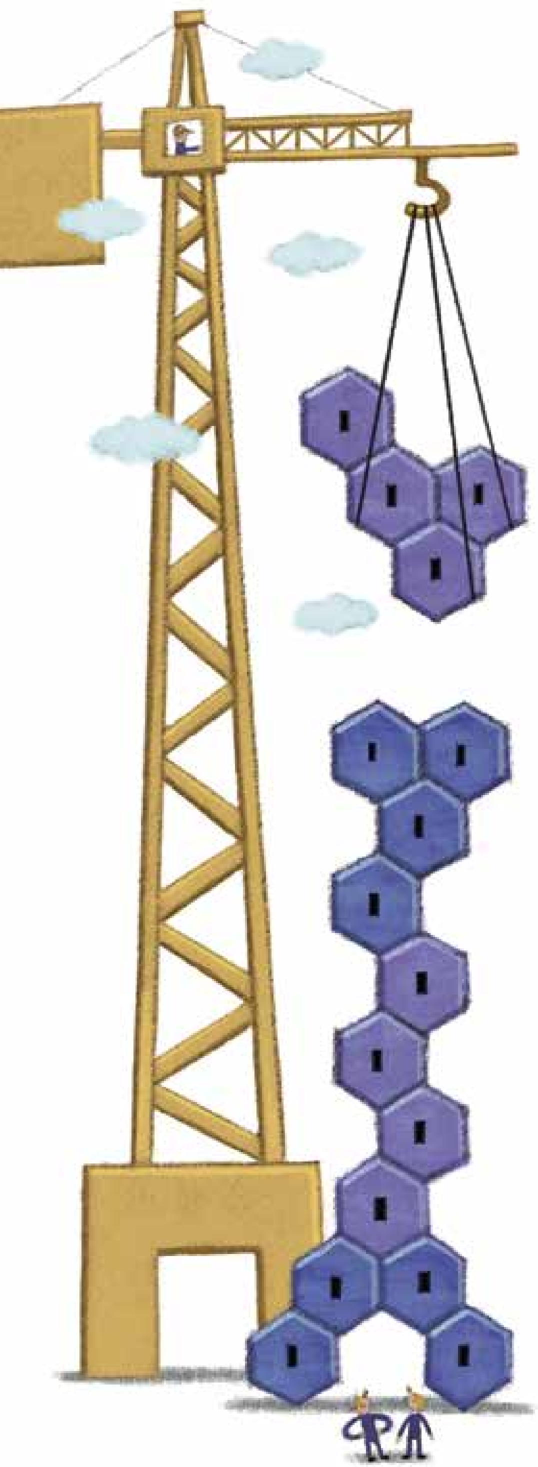


Рис. 2

Кстати, сложив первый силуэт, мы получаем возможность замостить бесконечный паркет элементами тетрагексагона. (Силуэт бесконечного паркета не приводим из соображения экономии бумаги.)

Но это всё головоломки для разминки. Более интересны задачи на составление фигур с заданными свойствами, когда силуэт заранее не известен (его

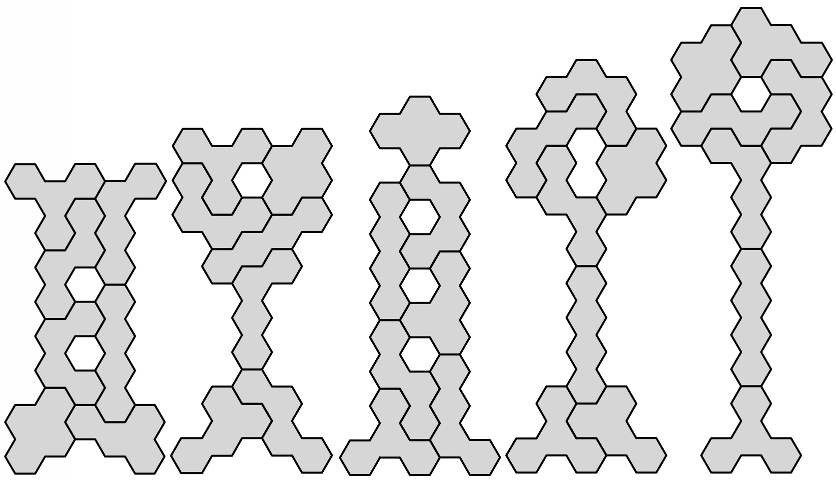




предстоит определить). Вот пара таких нестандартных задач. Для решения удобно вырезать фигурки со с. 25–26 и выкладывать их на шестиугольной сетке на с. 27.

Задача 1. *Используя весь набор тетрагексагонов, постройте симметричную башню наибольшей высоты.*

Примеры башен приведены на рисунке 3.

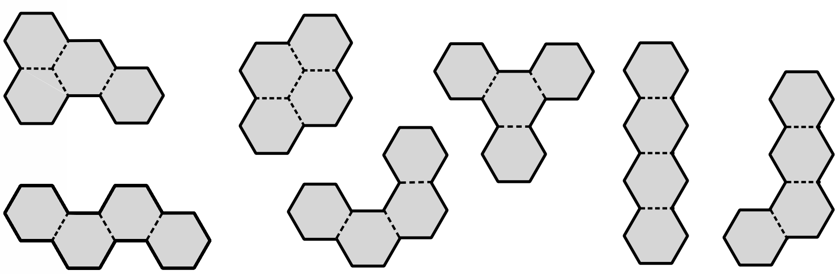


18 20 22 24 27

Рис. 3

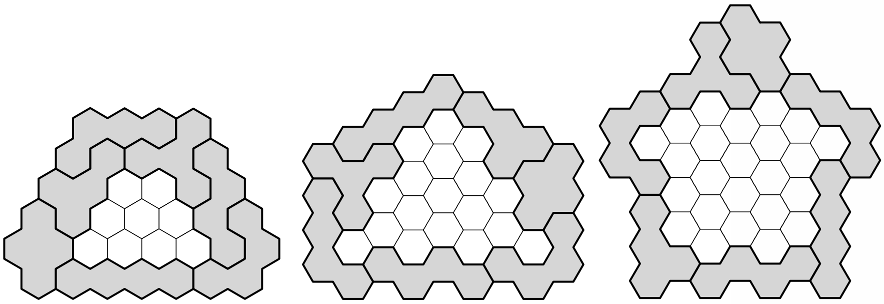
Под фигурами на рисунке 3 показана высота каждой из башен. За единицу измерения высоты тут удобно принять радиус круга, вписанного в шестиугольник сетки. (К примеру, высота фигуры ⬡, то есть шестиугольника сетки, равна 2).

Попробуйте построить более высокие симметричные башни. Мы умеем строить башни высотой 33, 34 и даже 35. Сможете найти эти или подобные решения?



Задача 2. *Используя весь набор тетрагексагонов, постройте симметричную фигуру с наибольшей площадью пустой области. Естественно, пустая область должна обладать той же симметрией, что и вся фигура. Площадь измеряйте в шестиугольниках сетки.*

Вот примеры симметричных фигур с пустотой.



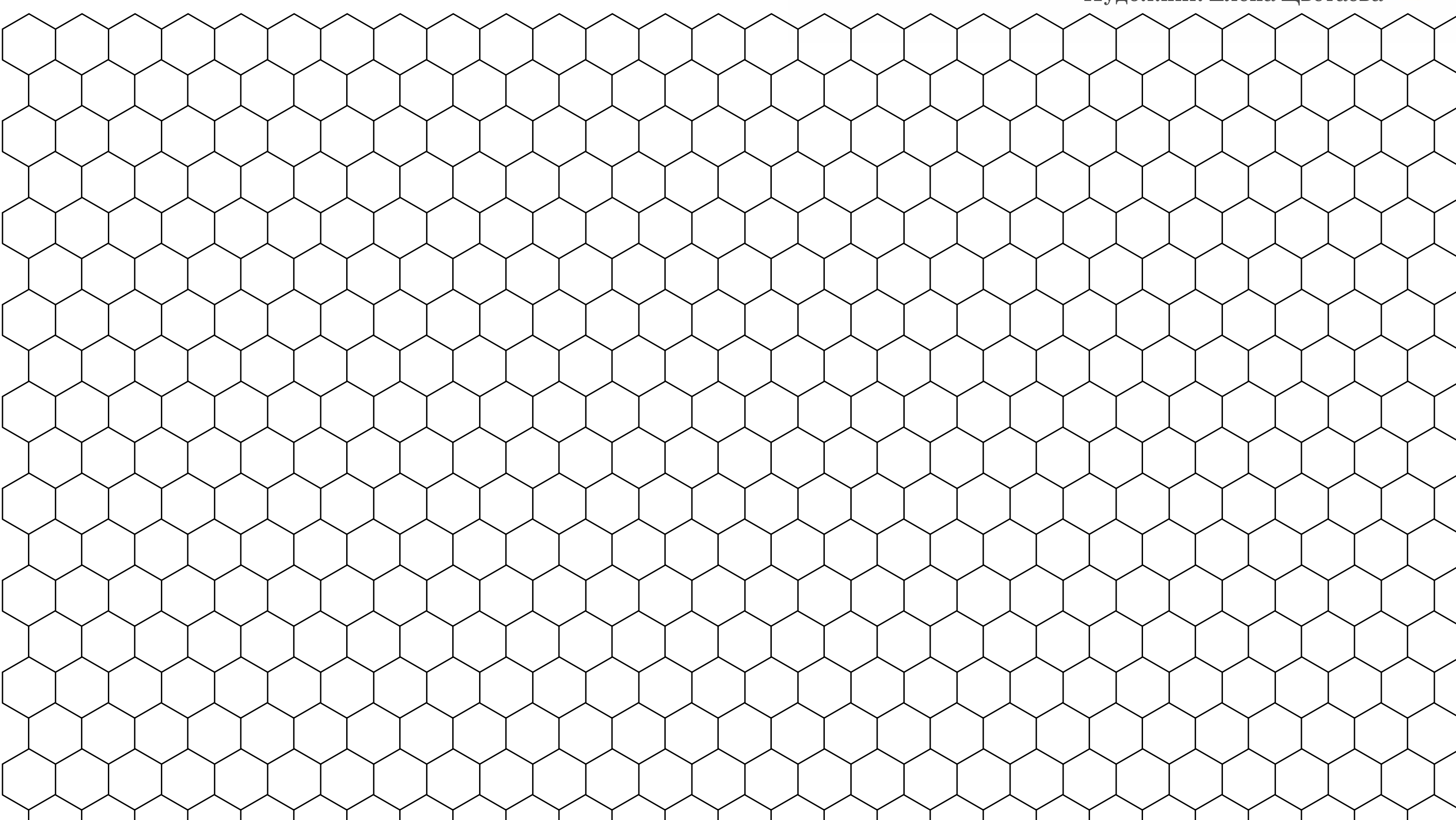
9 18 24

Рис. 4

Под каждой фигурой на рисунке 4 показана площадь пустой области. Нам известны симметричные фигуры с пустотой площади 28, 29, 30 и даже 31. Сможете найти (или улучшить) эти решения?

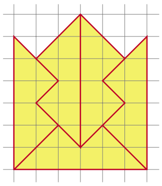
Желаем успехов и ждём ваших ответов!

Художник Елена Цветаева



НАШ КОНКУРС (**«Квантик» № 3, 2018**)

31. *Разрежьте фигурку на рисунке на 5 одинаковых частей.*



Пример см. на рисунке.

32. *Количество цифр в числе N в 2018 раз меньше, чем само число N. Чему может равняться N? (Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.)*

Ответ: 8072, 10090. Пусть запись числа N состоит из k цифр, тогда $N = 2018k$. Подставим первые несколько k:

k	1	2	3	4	5	6
N	2018	4036	6054	8072	10090	12108

Числа $k = 4$ и 5 подходят. Если $k = 6$, то в числе $2018k$ менее k цифр. Если дальше увеличивать k на 1, то к числу $2018k$ прибавляется 2018, и так как в нём не меньше 5 цифр, то число цифр увеличится не больше, чем на 1. Значит и дальше в числе $2018k$ будет менее k цифр.

33. *Два игрока по очереди нанизывают красные, синие и зелёные кольца на 33 стержня. У каждого игрока неограниченное количество колец каждого типа. За ход игрок нанизывает какое-либо кольцо на какой-то стержень. Запрещается помещать красное кольцо непосредственно на синее, а синее – непосредственно на зелёное. Также на стержне не может быть более одного кольца каждого цвета. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?*

Ответ: первый. Разобьём стержни на пары, оставив один стержень, назовём его C, без пары. Пусть первый игрок первым ходом наденет на C зелёное кольцо. Когда соперник наденет второе, красное кольцо, на C – первый наденет на C третье, синее кольцо. Если же соперник надевает кольцо на один из парных стержней, первый отвечает симметричным ходом – надевает кольцо того же цвета на парный стержень. Итак, у первого игрока всегда есть ответный ход, и он не проиграет. Поскольку ничья невозможна, проиграет второй.

34. *а) Петя пишет в каждой клетке доски 100×100 буквы А или Б так, чтобы всего на доске их было поровну. Вася передвигает по этой доске фишку, сдвигая её всё время только в соседнюю клетку и каждый раз записывая, на какой букве она стоит. Всегда ли Вася может так поставить фишку и так обойти ею все клетки ровно по одному разу, чтобы полученная последовательность букв одинаково читалась слева направо и справа налево?*

б) То же самое для доски 101×101, букв А на одну больше, чем букв Б.

Ответ: не всегда в обоих пунктах. а) Петя может раскрасить доску в шахматном порядке и на чёрных клетках написать *А*, а на белых *Б*. На соседних клетках стоят разные буквы, поэтому как бы Вася ни обошёл доску, буквы будут чередоваться: *АБАБ...АБАБ*. Всего клеток чётное число, поэтому последняя и первая буквы разные. Значит, последовательность справа налево читается по-другому.

б) Поставим буквы в шахматном порядке так, что букв *А* на одну больше, чем букв *Б*. Буквы чередуются при любом обходе и получается симметричная строка *АБА...АБА*. Выберем любую пару клеток с разными буквами и поменяем буквы местами. Тогда при любом обходе получается строка, которая отличается от *АБА...АБА* в двух местах: в одном *А* заменено на *Б*, в другом – *Б* на *А*. Эти места не будут симметричны друг другу, поэтому строка слева направо и справа налево читается по-разному.

35. *– Поделил я как-то одно натуральное число на другое с остатком, – рассказывал Петя Коле. – Когда же я поделил квадрат первого числа на второе, остаток оказался вдвое больше, чем был при первом делении. А когда я поделил куб первого числа на второе, остаток стал уже втрое больше.*

– Ну, это ты заливаешь, такого не может быть! – воскликнул Коля. – Вот со мной действительно была похожая история. Я тоже поделил одно натуральное число на другое с остатком. И когда я поделил куб первого числа на второе, остаток оказался вдвое больше первоначального, а когда поделил квадрат первого числа на второе, остаток стал втрое больше.

– Теперь уже ты сочиняешь! – заявил Петя.

Кто мог быть прав в каждом случае?

В первом случае прав Коля: то, что описывает Петя, невозможно. Если два числа делятся на третье, то можно каждое умножить на целый множитель (для каждого свой) и сложить или вычесть, и результат также будет делиться на третье число. Пусть Петя делил число k на m. По условию, k^2 и $2k$, а также k^3 и $3k$ дают одинаковые остатки при делении на m. Значит, k^2-2k и k^3-3k делятся на m. Умножим первое выражение на k и вычтем второе. Разность $(k^3-3k)-k(k^2-2k)=2k^2-3k$ делится на m. Из этой разности вычтем удвоенное первое выражение: $2(k^2-2k)$. Результат $(2k^2-3k)-2(k^2-2k)=k$ тоже делится на m. Значит, k делится на m, а по условию k даёт ненулевой остаток. Противоречие.

Во втором случае Коля мог быть прав. Например, 3 делится на 21 с остатком 3, и при делении на 21 число $3^3=27$ даёт остаток 6, а число $3^2=9$ даёт остаток 9.

ДВЕ СТРЕЛКИ ИЗ ТРЁХ
(«Квантик» № 4, 2018)

Сначала будем решать две задачи одновременно. Если на часовую (соответственно минутную) отметку указывает ровно одна стрелка, допустим, минутная, то с полуночи прошло целое число минут, то есть секундная стрелка указывает на отметку «12» – противоречие. Если же на отметку указывает часовая стрелка, то снова секундная стрелка указывает на отметку «12», потому что часовая стрелка указывает на отметку каждые 60 (соответственно 12) минут. Значит, единственная стрелка, показывающая на какую-то отметку – секундная.

А далее задачу придётся снова «раздвоить».

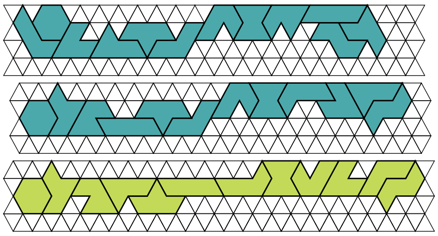
Задача для часовых отметок. Если секундная стрелка указала на отметку «12», а минутная не указывает ни на какую часовую отметку, то и часовая стрелка не указывает. Каждый час таких моментов $60-12=48$, мы не учитываем моменты, когда минутная стрелка показывает кратное 5 число минут. Всего часов 24, поэтому получаем $24\cdot48$ моментов.

Если секундная стрелка указала на отметку, но не на «12», то остальные стрелки не указывают на отметки. На каждую из 11 таких отметок секундная стрелка указывает $24\cdot60$ раз за сутки – столько же, сколько минут в сутках. Значит, ответ $24\cdot48+24\cdot60\cdot11=16\,992$.

Задача для минутных отметок. Если секундная стрелка указала на отметку «12», то минутная стрелка указывает на отметку – противоречие. Если нет, то время составляет нецелое число минут, а значит, остальные стрелки не казывают на отметки. На каждую из 59 подходящих нам отметок секундная стрелка указывает $60\cdot24$ раз за сутки – столько же, сколько минут в сутках. Значит, ответ $59\cdot60\cdot24$.

ГЕКСАТРИОН: НОВЫЕ ЗАДАЧИ СТАРОЙ ГОЛОВОЛОМКИ **(«Квантик» № 4, 2018)**

1. Рекорд на сегодня – фигура длины 21,5.

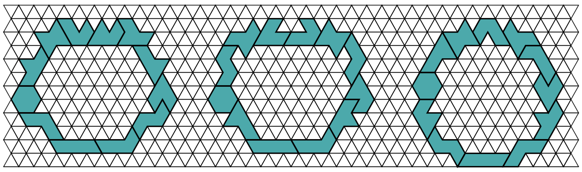


19,5

20,5

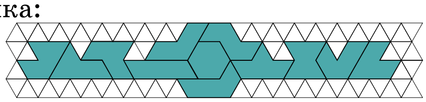
21,5

2. Рекорд на сегодня – фигура площади 95.



89 91 95

Примечание. В прошлом номере на с. 23 в средней картинке рисунка 3 допущена опечатка. Приносим свои извинения. Вот верная картинка:



ПРОЖЕКТОРЫ НАД АРЕНОЙ
(«Квантик» № 4, 2018)

Возможно любое число прожекторов. Укажем, какие фигуры освещают прожекторы.

Пусть m – общее число пар прожекторов. Впишем в круг-арену m-угольник. Тогда арена составлена из этого m-угольника и m сегментов. Каждому сегменту сопоставим свою пару прожекторов. Пусть каждый прожектор освещает m-угольник и те сегменты, которые сопоставлены парам, в которых есть этот прожектор. Проверим, что условия задачи выполнены.

Действительно, каждый прожектор освещает выпуклую фигуру. Каждый сегмент освещён двумя прожекторами, а m-угольник – всеми прожекторами. Если выключить любые два прожектора, то сегмент, сопоставленный их паре, не будет освещён. А если выключить любой один прожектор, то всё будет освещено.

КОСМИЧЕСКИЙ ТЕАТР ТЕНЕЙ

Если бы мы видели на этом фото только ярко освещённый Солнцем серп Луны, то однозначного ответа дать не смогли бы. В такой ориентации лунный серп бывает недалеко от экватора, как утром, так и вечером. Однако мы ясно различаем на фото не только освещённую Солнцем, но и ночную сторону Луны, её так называемый «пепельный свет». Положение лунных морей говорит нам о том, что ярко освещён восточный край лунного диска. Следовательно, на видимой стороне Луны начинается день. Значит, это растущий, молодой серп, который виден по вечерам.

На вторую задачу ответ дан в самой статье: источником пепельного света Луны служит Земля, то есть ночную часть видимого полушария Луны освещает солнечный свет, отразившийся от Земли. Поэтому на вопрос «Где ночи темнее: на видимой стороне Луны или на обратной?» можно смело отвечать «На обратной», поскольку с неё не видна Земля, которая ночью подсвечивает видимую сторону Луны.

КВАДРАТНЫЙ ПРОЦЕНТ

Если один угол равен 90, то два других можно обозначить за $45+x$ и $45-x$. Их произведение равно $90\cdot(45-x)\cdot(45+x)=90\cdot(45^2-x^2)$ и не больше $90\cdot 45\cdot 45=182\,250$. Значит, если произведение углов больше 182 250, то треугольник не прямоугольный.

САРА БЕРНАР, ДЖОАКИНО РОССИНИ, ХЕЛЬМУТ НЬЮТОН

Выдумана история про Ньютона. На самом деле мираж – это оптическое явление, и его вполне можно сфотографировать. Фотографии миражей вы легко найдёте в интернете.

XXXIX ТУРНИР ГОРОДОВ. ВЕСЕННИЙ ТУР, 8 – 9 классы

Базовый вариант

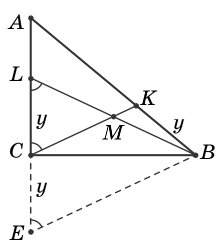
1. Ответ: могли. Клетка будет красной, если бьющие её ладьи стоят на одной диагонали, и синей – в противном случае.

а) Расставим ладей на главной диагонали.

б) Ладьи должны быть не бьющими друг друга ферзями (см. рисунок).

		Л			
					Л
	Л				
				Л	
Л					
			Л		

2. Треугольник AKC равнобедренный, так как $AK=AC$. На прямой AC за точку C отложим отрезок CE равный CL. Тогда $AE=AC+CE=AC+CL=AK+KB=AB$, то есть треугольник ABE тоже равнобедренный. Треугольники AKC и ABE равнобедренные с одинаковым углом при вершине, значит, углы при основании равны. Поэтому $\angle ACK=\angle AEB$. Так как угол C прямой и $CE=CL$, то треугольники CEB и CLB равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle CEB=\angle CLB$. У треугольника CLM углы при стороне CL равны, значит, он равнобедренный.



3. а) **Ответ:** можно. Пусть в правом нижнем углу находится число x. Сумма чисел в двух средних столбцах равна сумме чисел в двух крайних строках. Поэтому $4+5+6+7=1+2+3+x$, то есть $x=16$.

б) **Ответ:** нельзя. Рассмотрим любой подходящий набор из оставшихся восьми ещё неизвестных чисел. Добавим к каждому из них по 1. Суммы чисел в рядах увеличатся на 2, значит, останутся равными. Следовательно, ни одно из этих восьми чисел восстановить нельзя.

4. Ответ: обязательно. Пусть эти числа x, y, z. Докажем, что любое простое число p входит в разложение каждого числа в одной и той же степени – это и будет значить, что числа равны. Пусть p входит в x в степени α, в y – в степени β, в z – в степени γ. Можем считать, что $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$. Поскольку x делится на НОД(y,z), то $\alpha\geqslant\beta$, а поскольку НОК(x,y) делится на z, то $\beta\geqslant\gamma$. Значит, $\alpha=\beta=\gamma$, что и требовалось.

5. Ответ: не могло. Отрезок не пересекает ни одну из 7 прямых, если и только если его концы находятся по одну сторону от каждой прямой, то есть лежат в одной области из тех, на которые разбивают плоскость 7 прямых. Покажем, что областей не могло быть больше чем 29, а значит, какие-то две точки попали в одну область.

Сначала проведём одну прямую, а потом будем добавлять прямые по одной и следить, как меняется число областей.

Пусть уже проведено k прямых. Тогда следующая прямая пересечёт не более k прямых, а значит, разделится точками пересечения не более чем на $k+1$ кусков (отрезков и лучей). Каждый кусок лежит целиком в одной области и делит её на две части. Значит, при проведении $(k+1)$-й прямой добавляется не более $k+1$ областей. Самая первая прямая добавляет одну область к уже существующей одной – всей плоскости. Тогда 7 прямых делят плоскость не более чем на $2+2+3+4+5+6+7$ областей.

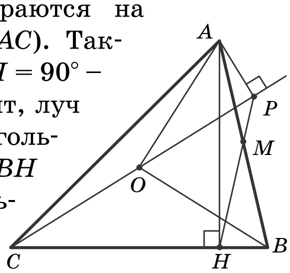
Сложный вариант

1. Ответ: плюс. Рассмотрим любое число с нечётным номером. Остальные числа разбиваются на пары соседних. Значит, их сумма положительна, поэтому рассматриваемое число отрицательно. Числа с чётными номерами должны быть положительными, чтобы суммы в парах с ними были положительными. Поэтому выписано 20 отрицательных чисел и 19 положительных, их произведение положительно.

2. Ответ: не мог. Пусть у Аладдина было $1000 + x$ слитков. После первой просьбы их станет $1000+\frac{x}{2}$, а после десяти просьб – $1000+$ $+\frac{x}{2^{10}}$. Следовательно, x делится на 1024. Так как $x \geqslant -1000$, то $x \geqslant 0$. Поэтому количество слитков не увеличилось.

3. Ответ: существуют. Выберем любые 2018 положительных несократимых дробей со знаменателями $b_1 > b_2 > ... > b_{2018} > 0$. Выберем дробь вида $\frac{1}{d}$, знаменатель d которой больше b_1b_2 и взаимно прост с $b_1b_2...b_{2018}$. Прибавим к каждой из 2018 дробей новую дробь. Полученные суммы будут искомыми, поскольку их знаменатели в несократимом виде будут равны db_i, а у разностей – не больше b_1b_2.

4. Так как треугольник остроугольный, то центр O описанной окружности лежит внутри треугольника. Поэтому $\angle AOC$ и $\angle ABC$ – центральный и вписанный углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Тогда $\angle B = \frac{1}{2}\angle AOC =$ $= 90° - \angle OCA = 90° - \angle PCA = \angle PAC = \angle PHB$ (последнее равенство следует из очевидной вписанности четырёхугольника $APHC$, в котором два прямых угла опираются на одну и ту же сторону AC). Также $\angle MAH = 90° - \angle MBH = 90° -$ $- \angle MHB = \angle MHA$. Значит, луч HP отсекает от прямоугольного треугольника ABH равнобедренные треугольники BMH и AMH. Поэтому M – середина AB.



5. Ответ: 197. Подойдём к первому дому на какой-то стороне. Пойдём вдоль улицы, потом около некоторого дома перейдём к противоположному дому, потом продолжим идти вдоль улицы, потом опять у некоторого дома перейдём к противоположному и дойдём до конца.

Пока мы шли вдоль улицы, номер каждого следующего дома был хотя бы на 2 больше предыдущего. Значит, разница номеров домов в начале и в конце улицы не меньше, чем $2 \cdot 49$ плюс разности номеров в двух парах домов, у которых мы перешли улицу. Покажем, что можно выбрать начальную сторону улицы и две пары домов так, чтобы эти две разности в сумме давали не меньше 98. Тогда мы получим, что у последнего дома номер не меньше $1+98+98=197$.

Действительно, все разности нечётны и различны, поэтому найдутся две, которые отличаются хотя бы на 98. Улицу нужно пересекать как раз у пар домов с этими разностями. Если меньшая из двух разность расположена ближе к началу улицы, чем бо́льшая, то нужно начинать обход с чётной стороны. Тогда при переходе улицы она войдёт в сумму с минусом, а бо́льшая – с плюсом. Если меньшая разность дальше от начала, то нужно начинать с нечётной стороны.

Пример. Пусть на правой стороне номера равны 2, 4, 6, ..., 98, 100, а на левой – 1, 5, 9, ..., 193, 197. Разности равны 1, –1, –3, ..., –97 и различны, наибольший номер дома равен 197.

6. Ответ: 2. Первый вопрос зададим из произвольной точки. Если все ответы на него одинаковы, то все сидящие за столом – лжецы, поскольку рыцарь и лжец дают разные ответы.

В противном случае найдутся соседи, ответившие по-разному. Встанем в середину дуги между ними. Так как хотя бы один из двоих – лжец, то до ближайшего лжеца расстояние известно. Тогда те, кто его назовёт, – рыцари, а остальные – лжецы.

За один вопрос определить лжецов не получится. Пусть, когда путешественник задал вопрос, самое маленькое расстояние до сидящих было a, а следующее по величине – b. Если сидящие на расстоянии a ответят b, а остальные ответят a, то хотя бы два случая возможны: когда сидящие на расстоянии a – все рыцари, остальные – лжецы, и когда всё наоборот.

7. Легко проверить, что $(a \; ? \; a) \, ! \, (a \; ? \; a) = 0$. Поэтому можно использовать обозначение «0». Убедитесь также, что $(a \; ? \; 0) \; ? \; (0 \; ? \; b) = a + b$, $0 \, ! \, ((0 \; ? \; (a \; ? \; 0)) \, ! \, 0) = -a$. Таким образом, мы научились складывать и брать противоположное число. Значит, можно получить и $20a - 18b$.

С 26 июня по 2 июля 2018 года на базе отдыха «Берендеевы Поляны» (Костромская область) пройдёт XXIV Турнир математических боёв имени А.П. Савина для школьников, закончивших 6 – 9 классы. Регистрация – до 25 мая 2018 года.
Подробности по ссылке tursavin.ru/info.html

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем
заочном математическом конкурсе.

Высылайте решения задач IX тура, с которыми справитесь, не позднее 1 июня в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: goo.gl/HiaU6g), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

IX ТУР

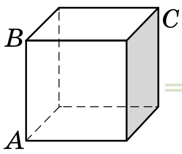
41. Юра смотрит на календарь, открытый на каком-то месяце, и говорит: «если к четвергу прибавить субботу, получится вторник». Какой сейчас месяц, если дело происходит в 2018 году?

42. Бен Ганн помнит, что Флинт зарыл свои сокровища, когда прошёл от высокой сосны, растущей в глубине острова, 10, 20, 30 и 40 ярдов в четырёх различных направлениях (север, юг, восток и запад), но не помнит, в каком именно порядке это было. Бен находится с компасом у той самой сосны. Сколько ям ему нужно выкопать, чтобы наверняка найти сокровища Флинта?

наш КОНКУРС

ОЛИМПИАДЫ

Авторы: Евгений Смирнов (41, 44),
Михаил Евдокимов (42, 43),
Александр Шаповалов (45)



43. Планета Плюк имеет форму куба, в трёх вершинах которого находятся города A, B и C (см. рисунок). Где нужно построить космодром так, чтобы расстояние от космодрома по поверхности планеты до городов было одинаковым? Укажите все варианты.

44. У Жени есть 10 кубиков, занумерованных цифрами от 0 до 9. Он отложил кубик с нулём и сложил остальные кубики в виде магического квадрата 3×3. Потом Женя потерял один кубик, но, используя отложенный кубик с нулём, снова сложил магический квадрат 3×3. Какой кубик потерял Женя? Укажите все возможности и докажите, что других нет.

45. Какое наибольшее число слонов можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждый бил не более одного другого? (Приведите пример расстановки и докажите, что большее число слонов расставить нельзя.)

Художник Николай Крутиков

ДВЕ ПИРАМИДКИ

У волшебника есть много одинаковых треугольных пирамидок с прямыми углами при вершине и рёбрами одинаковой длины, идущими из этой вершины (рис. 1). Пирамидки сделаны из чудесного материала и могут свободно проходить друг сквозь друга, не меняя своей формы.

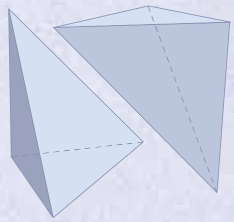


Рис. 1

Волшебник сдвинул две пирамидки (рис. 2) так, что вершина каждой пирамиды оказалась в центре основания другой пирамиды, а основания оказались повёрнуты друг относительно друга на 60° (если смотреть перпендикулярно основаниям, их вершины образуют правильный шестиугольник).

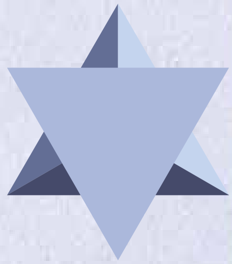


Рис. 2

Какую форму имеет общая часть этих пирамидок?

ISSN 2227-7986 18005
9 772227 798183

По задаче Игоря Шарыгина
Художник Елена Цветаева