Игорь Акулич

ЗЕРКАЛЬНОЕ ВРЕМЯ, или ПОВТОРЕНИЕ ПРОЙДЕННОГО

– Позволь-ка, Даня, задать неожиданный вопрос.

– Хорошо, Федя, так уж и быть, задавай.

– Сначала представь себе обыкновенные часы с двумя стрелками – часовой и минутной...

– Как неожиданно такое слышать! Особенно от тебя. Ну ладно, представил.

– Так вот: существуют ли два таких момента времени, что часовые стрелки в эти моменты симметричны друг другу относительно вертикальной оси, проходящей через центр часов, и минутные – тоже симметричны относительно той же оси? И если да, то какие это моменты?

– Так ведь мы решали такую задачу! В смысле, использовали именно такую симметрию при её решении.

– Когда это?

– Напомню. Условие было таково: **«Придворный астролог называет время суток хорошим, если по ходу часов минутная стрелка расположена после часовой и перед секундной; а иначе – плохим. Какого времени больше – хорошего или плохого?»**[1]

– Нет, это что-то другое. Да и стрелок здесь три.

– Неважно! Вспомни, как мы доказывали, что хорошего и плохого времени поровну. Пусть после полудня прошло время t (в часах). В этот момент стрелки как-то расположились по циферблату, и время может быть как плохим, так и хорошим. Теперь возьмём «симметричный» момент – за t часов до наступления того же полудня. Обрати внимание: стрелки расположатся симметрично первоначальному их расположению относительно вертикальной оси, проходящей через центр часов. Ведь это то же самое, что «открутить» стрелки от вертикального положения на t часов назад! Ну а если первое положение стрелок было плохое, то «зеркальное» ему второе положение стало хорошим (и наоборот). Значит, плохого и хорошего времени поровну! То есть на твои вопросы: «существуют ли, и если да, то какие...» ответ таков: существуют, и главное, любому моменту времени

[1] См. статью «Новые приключения продолжаются» из «Квантика» № 5 за 2015 г. Задачу придумал Д. Ботин.

можно указать другой момент с симметричным первому расположением стрелок относительно вертикальной оси! Причём положения стрелок иногда могут полностью совпасть со своими отражениями – например, в 12:00 или в 6:00. Здесь все стрелки лежат как раз на вертикали и после отражения от неё остаются на тех же местах.

– Согласен на все сто. Ну а если ось симметрии *не вертикальна*?

– Наверно, зависит от оси. Хотя... Да ведь эту задачу мы тоже решали!

– Не может быть! Ну-ка, напомни.

– Пожалуйста: **«Сколько раз в сутки минутная и часовая стрелки часов совпадают?»**[2]

– Но *здесь-то* что общего?

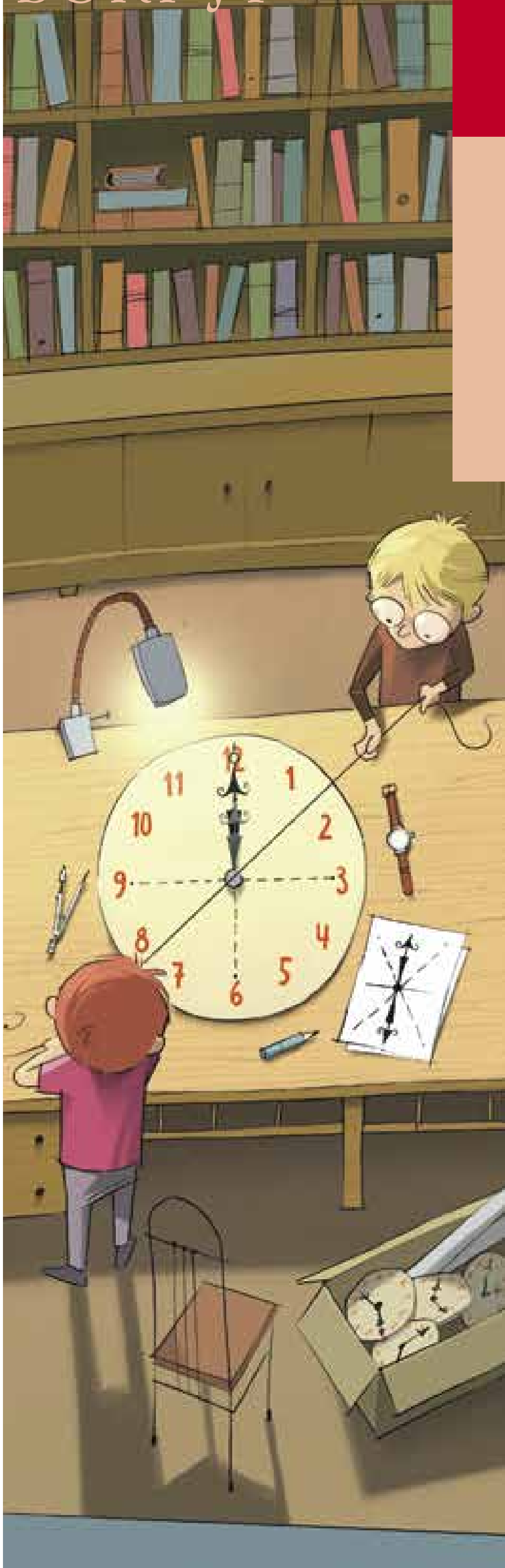
– Давай сначала о том, в чём отличия. Прежде всего, в таких задачах нет необходимости рассматривать целые сутки – достаточно ограничиться полусутками (потому что часовая стрелка проходит полный оборот именно за такое время), а потом ответ удвоить. А за полсуток такое совпадение имеет место ровно 11 раз – когда обе стрелки вертикальны (в полдень и в полночь), и далее через каждые $\frac{12}{11}$ часа.

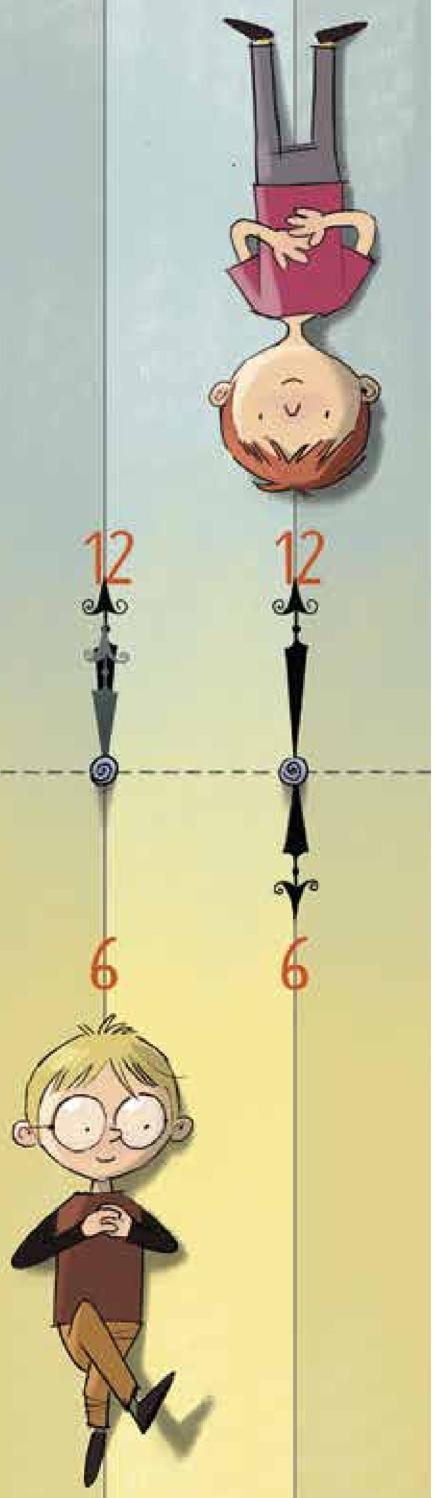
– Да помню я это!

– А теперь смотри. Возьмём любой из этих одиннадцати моментов и в качестве оси симметрии выберем именно ту прямую, на которой лежат совпадающие стрелки. Теперь возьмём два момента времени: один – через t часов *после* этого момента, а второй – наоборот, за t часов *до* этого момента (здесь t – как и ранее, произвольный промежуток времени). Чтобы получить эти моменты, надо перевести стрелки от момента их совпадения на одно и то же время вперёд, а также назад. Уж тут-то совершенно ясно, что положения соответствующих стрелок окажутся симметричны относительно выбранной наклонной оси.

– Итак, найдено 11 положений оси симметрии (включая вертикальную), при которой любому моменту времени можно поставить в соответствие другой момент с симметричным расположением стрелок.

[2]См. статью С.Дориченко «Приключения со стрелками» из «Квантика» № 1 за 2012 г.





Но думаю, это ещё не всё – ведь имеются и моменты, когда часовая и минутная стрелка направлены *строго в противоположные стороны*.

– А вот и нет! Моменты, конечно, другие, но оси-то *те же самые*.

– Это почему?

– А ты возьми момент, когда стрелки совпадают, а потом другой – ровно через 6 часов. Часовая стрелка при этом повернётся в противоположную сторону, а минутная-то останется на месте. Момент другой – а ось та же самая.

– Согласен. Но может, есть ещё какие-то «хорошие» положения оси? Как бы *принципиально* иные?

– Думаю, что нет.

– Думать – не значит доказать.

– Могу и доказать. Рассуждаем так. Пусть имеются два момента времени, при которых часовые и минутные стрелки симметричны относительно одной и той же оси. Ясно, что если стрелки для одного из этих моментов передвинуть на какое-то время вперёд, а для второго – на такую же величину назад, то расположения стрелок останутся симметричными относительной той же оси (потому что углы перемещения стрелок равны, но противоположны). Поэтому давай передвинем стрелки для одного из моментов вперёд так, чтобы часовая стрелка совпала *с самой осью симметрии*. Тогда, если передвинуть стрелки для второго момента на такой же промежуток назад, то и там часовая стрелка займёт такое же положение! Ведь симметрия-то сохранится, и если одна из стрелок окажется на оси симметрии, то вторая должна будет оказаться на той же оси. Итак, часовые стрелки совпадут. Но тогда и минутные должны совпасть – ведь это же будет один и тот же момент времени. А поскольку минутные стрелки совпадут *между собой* и к тому же останутся симметричны относительно данной оси, то им просто некуда деваться, кроме как совпасть с этой осью.

Итак, что в результате? На оси симметрии лежат и часовая, и минутная стрелки. Это может быть достигнуто двумя путями: направления часовой и минутной стрелок либо совпадают, либо противоположны. А эти две возможности уже включены в найденные нами положения оси симметрии. Значит, других осей (сверх 11 найденных), при которых возможно симметричное положение стрелок, нет.

– Ура, с двумя стрелками разобрались. А если на часах *три* стрелки – возможна ли симметрия их всех?

– Наверное, ты удивишься, но *и эту* задачу мы когда-то решили! По крайней мере, наполовину.

– Не верю!

– Не шуми, не Станиславский. Вот эта задача: **«Сколько раз в сутки совпадут все три стрелки часов?»**[3] Помнится, мы тогда выяснили, что такое бывает, только если все они смотрят вверх (в полдень или в полночь). А ведь нам из найденных одиннадцати осей надо выбрать именно такую, что в какой-то прекрасный момент времени на ней будут лежать *все три* стрелки. Значит, вертикальная ось как раз подойдёт, а насчёт наклонных – надо ещё подумать...

– А почему ты говорил «наполовину»?

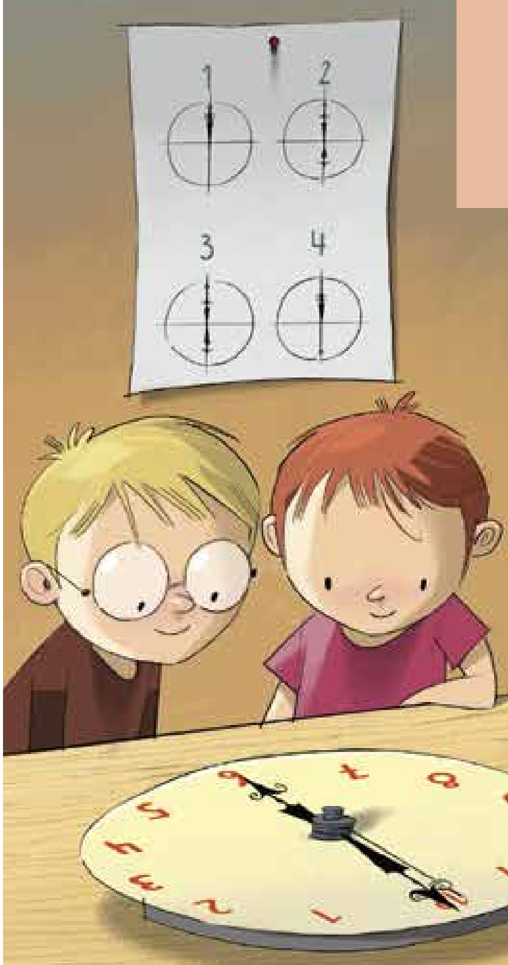
– Потому что «стрелки совпадут» и «стрелки лежат на одной прямой» – не одно и то же. Возможен вариант, когда две стрелки направлены в одну сторону, а третья – в противоположную.

– Так здесь всего, выходит, аж *четыре* варианта: либо все три стрелки совпадают, либо одна из них – часовая, минутная или секундная – «оторвалась от коллектива». Поэтому наше тогдашнее решение – это лишь четверть проблемы.

– Нет, всё-таки половина. Заметь, если минутная и секундная стрелки совпадают, а часовая им противоположна, то через 6 часов они все три отлично совпадут и будут лежать на той же самой прямой. Так что эти две возможности (из четырёх) фактически объединяются в одну. То же относится и к двум оставшимся вариантам – их тоже можно объединить в один.

– Ты прав! В самом деле, если часовая и минутная стрелки совпадают, а секундная смотрит в обратную сторону, то через шесть часов, наоборот, часовая сольётся с секундной. А ось останется той же.

– Значит, достаточно разобраться с одним-единственным случаем: когда часовая и минутная стрелки



[3]См. статью «Приключения продолжаются» из «Квантика» № 6 за 2012 г.

совпадают, а секундная им противоположна. Совпадение часовой и минутной стрелок в течение полусуток, как мы уже выяснили, происходит в полночь (полдень) и далее ещё 10 раз – через каждые $\frac{12}{11}$ часа. Пойдём многократно проверенным путём: полный оборот обозначим за единицу, начало отсчёта – вертикальное положение. Так как один оборот – это 12 часов, то $\frac{12}{11}$ часа соответствуют $\frac{1}{11}$ оборота, и потому в момент совпадения часовая стрелка прошла путь $\frac{n}{11}$, где n – целое число от 0 до 10. Скорость вращения минутной стрелки в 12 раз больше, и она пройдёт путь, равный $\frac{12n}{11}$. Так как $\frac{12n}{11} - \frac{n}{11}$ равно n, то есть целому числу оборотов, то действительно часовая и минутная стрелки совпадают (хотя это мы и так знали). А теперь – секундная. Она движется в 60 раз быстрее минутной и пройдёт путь $\frac{720n}{11}$. И если секундная опережает часовую на некоторое целое число оборотов m и ещё пол-оборота, то получается уравнение: $\frac{720n}{11} - \frac{n}{11} = m + \frac{1}{2}$.

Отсюда $2 \cdot 719 \cdot n = 11 \cdot (2m+1)$. И что дальше?

– Всё ясно – это невозможно! В левой части – *чётное* число (из-за сомножителя 2), а в правой – нечётное (произведение двух нечётных чисел).

– Итак, общий вывод (из всего, что мы сегодня наворотили): существуют 11 положений оси симметрии, относительно которых *любому* моменту времени можно поставить в соответствие момент, когда часовые стрелки обоих моментов симметричны между собой относительно этой оси и минутные – тоже симметричны. А если требуется, чтобы ещё и секундные стрелки были симметричны, то такое возможно только относительно единственной оси – вертикальной (но опять же для *любого* момента времени).

– Правда, к сожалению, почти все наши результаты основаны на ранее решённых задачах. По сути – повторение пройденного!

– Какое может быть сожаление? В этом и состоит глубинная суть математики – свести задачу к ранее решённой! Наоборот, гордиться надо!

Художник Алексей Вайнер