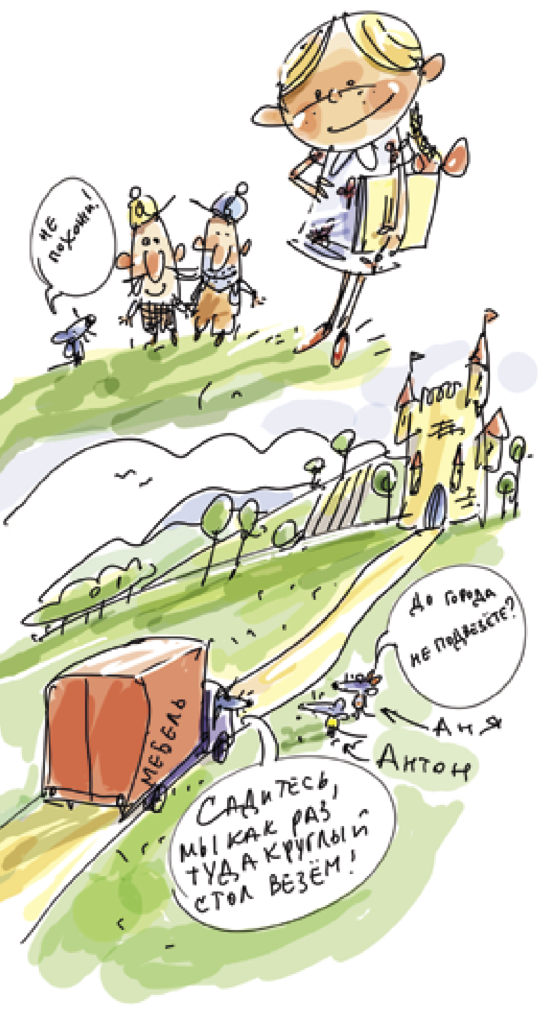
LXXXIV САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Материал подготовил Константин Кохась

Санкт-Петербургская олимпиада по математике проводится для школьников с 6 по 11 класс. Мы приводим несколько задач второго (городского) тура для 6 и 7 классов, прошедшего 11 февраля 2018 года.

Городская олимпиада – устная. Решив задачу, школьник рассказывает решение одному из членов жюри, который ищет ошибки и задаёт уточняющие вопросы. Отвечающий может исправлять и дополнять решение «на ходу», но если он не может сделать этого достаточно быстро, то засчитывается неверный подход. Всего участник может сделать три подхода по каждой задаче. При подведении итогов учитывается только количество задач, решённых каждым участником.



Избранные задачи городского тура

6 класс

1. В тетрадь записали все натуральные делители натурального числа a, а затем – все натуральные делители натурального числа b. В результате в тетради оказалось записано чётное количество чисел. Катя разбила все эти числа на пары и посчитала произведение чисел в каждой паре. (Например, при $a=2$, $b=6$ в тетради окажется 6 чисел – 1, 2, 1, 2, 3, 6; они будут разбиты на 3 пары.) Все Катины произведения оказались равными. Докажите, что $a=b$.

Сергей Берлов

2. За круглым столом сидят 300 человек: некоторые из них рыцари, а остальные – лжецы. Антон спросил у каждого из них: «Сколько лжецов среди твоих соседей?» и сложил полученные числа. Затем Аня сделала то же самое. Отвечая на вопрос, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут, но называют лишь числа 0, 1 или 2. Оказалось, что сумма чисел у Антона на 400 больше, чем у Ани. Сколько за столом лжецов? Найдите все возможные варианты ответа и докажите, что других нет.

Антон Чухнов

3. На доске написано число 2018. Игроки ходят по очереди, начинает Саша. За один ход Саша может приписать справа к числу на доске одну цифру, а Андрей – две. Если после хода Андрея число на доске станет делиться на 112, он побеждает. Если

этого не произойдёт и на доске окажется выписано 2018-значное число, выигрывает Саша. Кто из игроков может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?

Александр Кузнецов

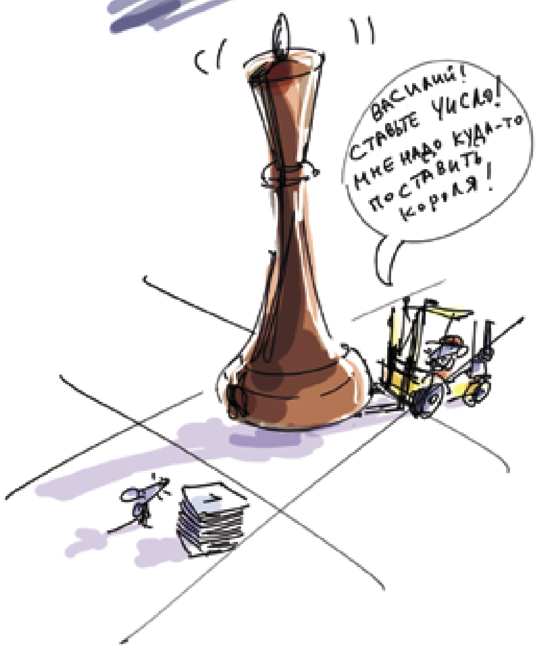
4. На прямой дороге, идущей с севера на юг, стоит воз, которым управляет Лебедь. Ровно в полночь Рак и Щука выбрали натуральные числа $m > n$. Каждые n минут (то есть через n, $2n$, $3n$... минут после полуночи) Щука командует «На юг!», а каждые m минут (через m, $2m$, $3m$... минут после полуночи) Рак командует «На север!». Услышав любую команду, Лебедь немедленно начинает (или продолжает) тащить воз в указанную сторону со скоростью 1 м/мин. До первой команды воз был неподвижен. Через mn минут после полуночи Рак и Щука впервые дали Лебедю одновременно две разные команды, и уставший Лебедь остановил воз. На каком расстоянии от исходного места он оказался в этот момент?

Константин Тыщук

7 класс

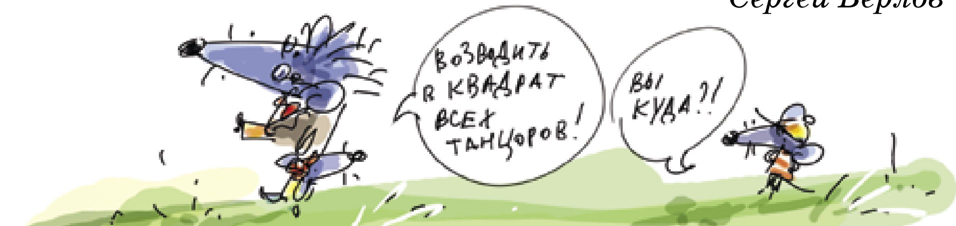
5. Многие жители города занимаются танцами, многие – математикой, а хотя бы один – и тем, и другим. Тех, кто занимается только танцами, ровно в $p+1$ раз больше, чем тех, кто занимается только математикой, где p – некоторое простое число. Если возвести в квадрат количество всех математиков, получится количество всех танцоров. Сколько жителей увлекается и математикой, и танцами одновременно?

Дмитрий Ширяев



6. Вася расставил во всех клетках доски 99×99 числа от 1 до 99^2 по одному разу. Петя выбирает клетку доски, ставит на неё шахматного короля и хочет сделать как можно больше ходов королём так, чтобы число под ним постоянно увеличивалось. Какое наибольшее число ходов Петя заведомо сможет сделать, как бы Вася ни расставлял числа?

Сергей Берлов



Художник Сергей Чуб