МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СКАЗКИ

Константин Кохась

БЕНЗОПИЛА

– Друзья мои, – с тревогой в голосе сказал дятел Спятел, когда все уселись, – помните ли вы, что следующий четверг – это день злобнопотамства?

– Нам-то какое дело, – проворчала Огрыза, – мы не отмечаем этот праздник!

– Мы не празднуем, – согласился дятел Спятел. – А коллега Спрудль празднует. Он хочет подарить Злобнопотаму на день злобнопотамства бензопилу!

– Ужас-с-сно, – сказал Ушася. – Злобнопотам с бензопилой – это ни в какие ворота не лезет!

– Наоборот! – с энтузиазмом возразила Бусенька. – С бензопилой он пролезет в любые ворота: он искрошит их в щепки!

– Пора ставить железную дверь? – спросила Огрыза. – Сколько хлопот! Может, переключить внимание коллеги Спрудля на что-то более безопасное? Пусть, скажем, подарит Злобнопотаму пилку для ногтей!

– Пилка лучш-ш-ше бензопилы, – согласился Ушася, – но мне кажется, вообще не следует дарить Злобнопотаму никаких ос-с-стрых предметов.

– С точки зрения коллеги Спрудля пилка для ногтей не годится для подарка, – возразил дятел Спятел. – Он ведь обожает всякие технические новинки.

– Но в руках Злобнопотама любая техника опасна, – сказала Бусенька. – Поэтому нужно, чтобы подарок надоел ему до того, как он успеет наломать дров. Я думаю, ему подойдёт… аккумуляторный лобзик!

– А коллега Спрудль захочет дарить лобзик? – усомнился Ушася.

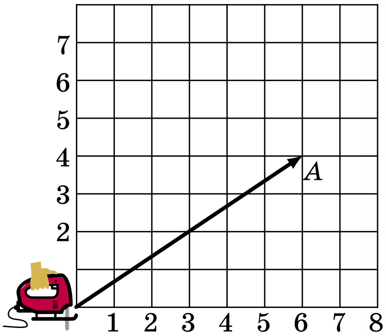
– Без вариантов! Ты его загипнотизируешь, а я прочту инструкцию по эксплуатации. Там столько красочных рекламных фраз, что он не устоит.

* * *

Злобнопотам нажал на кнопку «Вкл». Лёгкое движение – и отпиленная лобзиком ножка стола упала на пол. Весь пол Заброшенного Грота уже был усыпан опилками и всевозможными деревянными обломками.

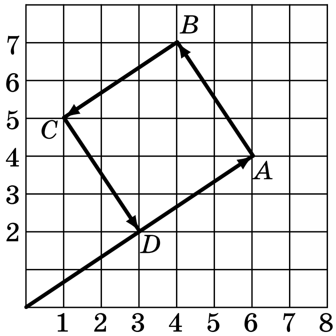
– Са-а-амое интересное, – объяснял Злобнопотаму коллега Спрудль, – это то, что лобзик может пилить не только под прямым углом! Смотри, – коллега Спрудль поднёс лобзик к столу, – включаем лазерный трассировщик, и на столе появляется квадратная сетка. Можно выставить направление на любой её узел. Например, ставлю на узел (3,2) и… бульк!

Коллега Спрудль нажал на кнопку «Вкл», и лобзик стал пропиливать столешницу под указанным углом.



– Меняя угол, мы можем выпи-и-иливать фигуры весьма сложной формы! – воодушевлённо объяснял коллега Спрудль. – Впрочем, для начала давай выпилим квадратик.

Коллега Спрудль допилил до точки A, выставил направление (–2,3) и пропилил разрез AB. Затем, установив направление (–3,–2), дошёл до точки C и наконец, направив лобзик в сторону (2,–3), достиг точки D. Столешница хрустнула и из неё выпал ровный квадратный кусок $ABCD$.

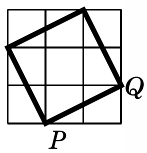


– Забавная штучка, – сказал Злобнопотам, отбирая у коллеги Спрудля лобзик, и, не добавив «спасибо», направился к выходу. – Пойду поупражняюсь!

* * *

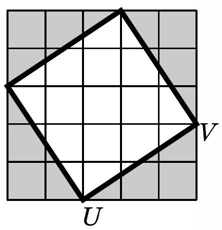
На берегу озера сидели Бусенька и дятел Спятел. Рядом лежал лист фанеры и были разложены инструменты: пилка для ногтей, ручной лобзик и большая двуручная пила. Злобнопотам подкрался поближе и стал подслушивать.

– Если мы начертим квадрат со стороной PQ, – объясняла Бусенька дятлу Спятлу, показывая чертёж, – его площадь будет равна 5.



– Не годится, – возразил дятел Спятел, – 5 это слишком мало.

– Тогда давай возьмём квадрат со стороной UV. Получится квадрат площади 13.



– 13? Это уже лучше. А что, площади таких квадратов всегда целые?

– Конечно. Чтобы выпилить такой квадрат, можно сначала взять содержащий его клетчатый квадрат с вертикальными и горизонтальными сторонами, а потом отрезать 4 треугольника. Площадь большого квадрата целая, так как он состоит из целого числа клеток; сумма площадей треугольников тоже целая, так как из них можно сложить 2 прямоугольника.

– Как интересно. Но я не уверен, подойдёт ли нам этот квадрат. Давай изготовим опытный образец. Какую пилу ты предпочитаешь? – И дятел Спятел махнул крылом в сторону инструментов.

– Вообще-то, навыки владения пилой у меня развиты не очень сильно, – призналась Бусенька. – И к тому же квадрат со стороной UV такой большой…

– Разойдись, мелкотня, – раздался голос Злобнопотама, – а не то я вас самих распилю! Что выпиливаем? Квадрат? Направление $(3, 2)$? Э-ле-мен-тар-но! – И Злобнопотам быстро, злобно, но довольно ровно выпилил из фанерного листа нужный квадрат.

Дятел Спятел внимательно изучил выпиленный квадрат и заявил:

– Не годится! Квадрат – это слишком примитивно! Нам нужен не квадрат, а пятиугольник! Правильный пятиугольник с вершинами в целых точках!

– Гениально! – воскликнула Бусенька. – С пятиугольником нам даже не придётся подгонять размеры, длина стороны может быть любой! Как я сама не догадалась. Выпили, пожалуйста, правильный пятиугольник! – обратилась она к Злобнопотаму. – У мастера с суперлобзиком это займёт не более минуты!

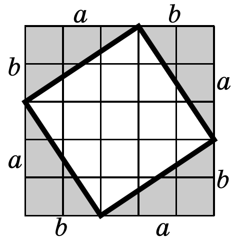
– Пока маэстро рассчитывает направления распилов, мы сходим за новым фанерным листом! – подмигнул Бусеньке дятел Спятел. – Скоро вернёмся!

– Я тоже хочу купить себе лобзик, как у этого героя, – восхищённо сказала Бусенька, когда друзья немного отошли от Злобнопотама, но тот всё ещё мог их слышать. – Однако никакой лобзик не заменит герою голову, – добавила она, когда берег скрылся из виду. – Вообще-то, должна тебе сказать, мы нехорошо поступаем со Злобнопотамом. Пока мы приманивали его и говорили о выпиливании квадратиков, мы выяснили, что площадь любого квадрата с вершинами в целых точках – целое число. Можно сказать точнее: если a и b – это горизонтальная и вертикальная проекции стороны квадрата, то площадь S этого квадрата имеет ту же чётность, что и $a+b$.

– А почему? – поинтересовался дятел Спятел.

– Построим наш квадрат, вырезая из квадрата $(a+b)\times(a+b)$ четыре серых прямоугольных треугольника площади Δ каждый, – стала пояснять Бусенька. – Тогда $S=(a+b)^2-4\Delta$. Например, если a и b оба чётные, то ясно, что S чётно и даже делится на 4. А что получится, если оба числа a и b нечётные?

– Если числа a и b нечётные, – стал рассуждать дятел Спятел, – то сторона квадрата $(a+b)\times(a+b)$ имеет чётную длину. Значит, его площадь делится на 4. При этом число $\Delta=\frac{1}{2}\,ab$ равно половине нечётного числа, из-за чего число 4Δ получается чётным, но не делящимся на 4. Следовательно, число $S=(a+b)^2-$ -4Δ – тоже чётное, но не делится на 4. Но всё равно в этом случае S и $a+b$ имеют одинаковую чётность.



– Да, в обоих разобранных случаях $a+b$ чётно, – согласилась Бусенька, – и мы можем отличить эти случаи друг от друга с помощью делимости числа S на 4. Ну а если $a+b$ нечётно, то есть числа a и b разной чётности, легко видеть, что S тоже нечётно.

– И чего же нехорошего мы совершили? – спросил дятел Спятел. – Мы задали Злобнопотаму интересную задачу!

– Но мы просим его совершить невозможное! Таких пятиугольников нет! Вот допустим, мы научились рисовать на плоскости правильные пятиугольники, у которых координаты всех вершин целые. Возьмём пятиугольник с *наименьшей* возможной стороной и заключим его в прямоугольную рамку, как мы это делали с квадратом. А теперь – фокус! На каждой стороне пятиугольника построим квадрат!

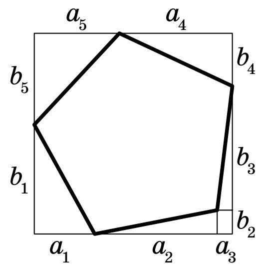
– Потрясающая картинка, – сказал дятел Спятел, нарисовав чертёж на песке. – С ума сойти можно!

– Тогда давай лучше рассуждать без этой сумасбродной картинки! – Бусенька отодвинулась. – На каждой стороне пятиугольника *мысленно* построим

квадрат и найдём его площадь S. Так как стороны пятиугольника равны, для каждой стороны мы получим одно и то же число S. Посмотрим на его чётность.

Если S чётно и делится на 4, то, как мы выяснили, у каждой стороны обе проекции чётны. Тогда можно считать, что и координаты всех вершин пятиугольника чётны. Поделив все координаты на 2, получим вдвое меньший пятиугольник, чего не может быть, поскольку наш пятиугольник самый маленький!

Если S чётно, но не делится на 4, то у каждой стороны пятиугольника обе проекции a и b нечётны. На нашей картинке получается, что левая сторона рамки состоит из двух нечётных отрезков b_1 и b_5, а правая сторона, равная ей, – из трёх нечётных отрезков b_2, b_3 и b_4. Это невозможно. Такое же противоречие получится, если пятиугольник будет вписан в рамку по-другому.

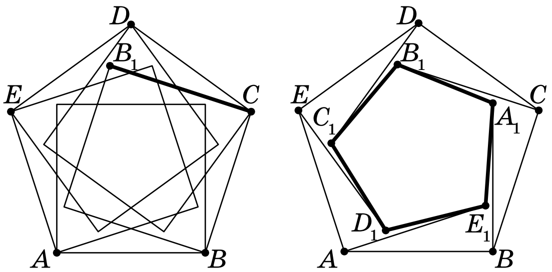


Осталось разобрать случай, когда S нечётно. Тогда сумма $S+S+S+S+S=5S$ (в неё входит по одному слагаемому S для каждой стороны) нечётна. Однако она имеет такую же чётность, что и сумма проекций всех сторон пятиугольника, которая равна периметру рамки, то есть чётному числу!

Таким образом, для любой чётности числа S мы получили противоречие. Значит, *не существует правильного пятиугольника, у которого все вершины целочисленные*! Но Злобнопотам – он же не настолько образованный! Он сам никогда до этого не догадается. Получается, что мы его обманываем?

– Это не обман, а военная хитрость! – возразил дятел Спятел. – Он не догадается не потому, что необразованный, а потому, что не использует голову по назначению! – Тут дятел Спятел бросил взгляд на сумасбродную картинку, задумался на секунду и продолжил уже более спокойно.

– На самом деле мы ведь не знаем, как думает Злобнопотам. Мы не можем залезть в его мозг – там слишком тесно! Но мы видели, что он прекрасно освоил выпиливание квадратов и, значит, дальше вполне бы мог рассуждать так, – дятел Спятел повернулся к сумасбродной картинке, взъерошил перья, наподобие того как Злобнопотам встопорщивал колючки на загривке, и продолжил, изображая рассуждающего Злобнопотама. – «Допустим, что мне удалось нарисовать правильный пятиугольник с вершинами в целых точках. Тогда, установив на лобзике подходящий угол и начав с целочисленной точки B, я могу – вжух! – сделать распил по стороне BC до целочисленной точки C. А если бы я в этот момент повернул лобзик на $90°$, как при выпиливании квадрата, я пропилил бы – вжух! – отрезок CB_1, второй конец которого, то есть точка B_1, тоже имеет целые координаты».



В результате этого умозрительного эксперимента Злобнопотам построил бы внутри пятиугольника точку B_1 с целыми координатами. Повторим эту конструкцию пять раз, беря вместо BC другие стороны пятиугольника. Мы получим – вжух! – маленький пятиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$ внутри исходного. Будем строить всё новые и новые пятиугольники и находить всё новые вершины с целыми координатами. Но в нашем исходном пятиугольнике конечное число таких точек, – трагически произнёс дятел Спятел, – когда-то они кончатся и наступит противоречие!

– Только обрати внимание на слова: «мы получим», «мы будем строить», – сказала Бусенька. – Это опять мы, а не Злобнопотам. Боюсь, Злобнопотам никакого противоречия не получит.

– У него был шанс! – не согласился дятел Спятел. – Думаю, пора проверить, как там наш герой.

Друзья снова вышли на берег. На берегу никого не было. А неподалёку от пилки для ногтей, ручного лобзика и большой двуручной пилы валялся со злостью разбитый аккумуляторный лобзик.

– Операция «Бензопила» успешно завершена, – грустно сказал дятел Спятел.

Художник Инга Коржнева