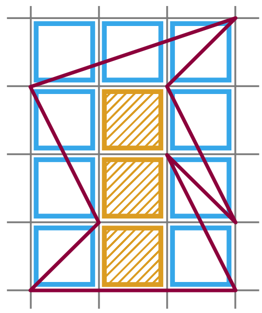
Григорий Мерзон

# ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ И ТАЮЩИЙ ЛЁД

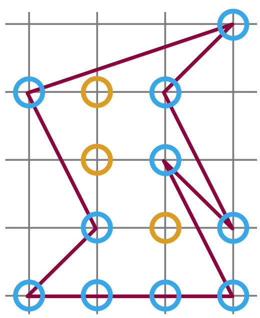
## ФОРМУЛА ПИКА

Как найти площадь многоугольника на клетчатой бумаге? Можно подсчитать число клеток, которые полностью накрыты фигурой, и ещё как-то учесть клетки, накрытые фигурой частично, – скажем, прибавить половину от числа этих клеток. И сказать, что площадь фигуры (в клеточках) *приблизительно* равна полученной сумме.

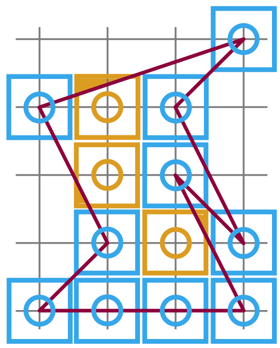


$$S \approx 3 + \frac{9}{2}$$

А можно вместо клеток, полностью или частично накрытых многоугольником, считать узлы сетки (вершины клеток) строго внутри многоугольника или на его границе.



$$S \approx 3 + \frac{10}{2}$$



Действительно, вокруг каждого узла сетки можно нарисовать по единичному квадратику. И если узел лежит на границе многоугольника, то этот квадратик накрыт многоугольником только частично. А если узел лежит внутри, то обычно и квадратик накрыт многоугольником полностью... впрочем, иногда всё же не полностью – но мы и считаем площадь только приближённо.

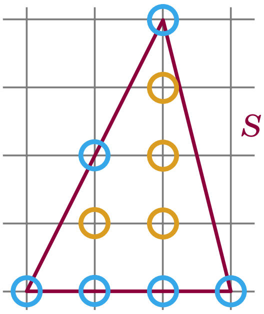
Но чудесным образом последний рецепт всегда даёт почти правильный ответ! А именно, верна

**Формула Пика.** *Площадь $S$ многоугольника с вершинами в узлах сетки можно найти по формуле*

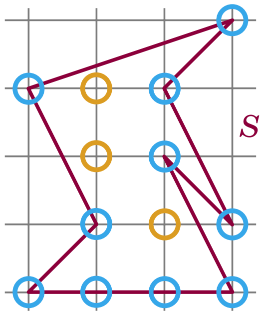
$$S = i + \frac{b}{2} - 1,$$

*где $i$ – число узлов сетки строго внутри многоугольника, $b$ – число узлов сетки на его границе.*

Подчеркнём, что это уже не приближённая, а *точная* формула!



$S = 4 + \frac{6}{2} - 1$



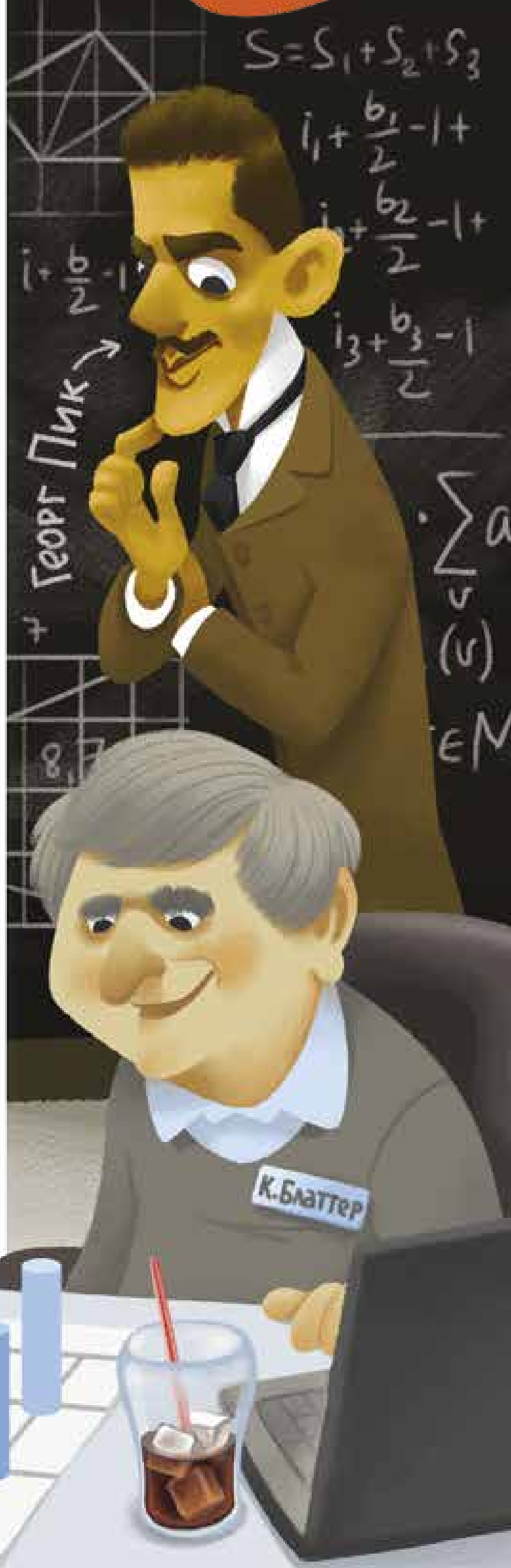
$S = 3 + \frac{10}{2} - 1$

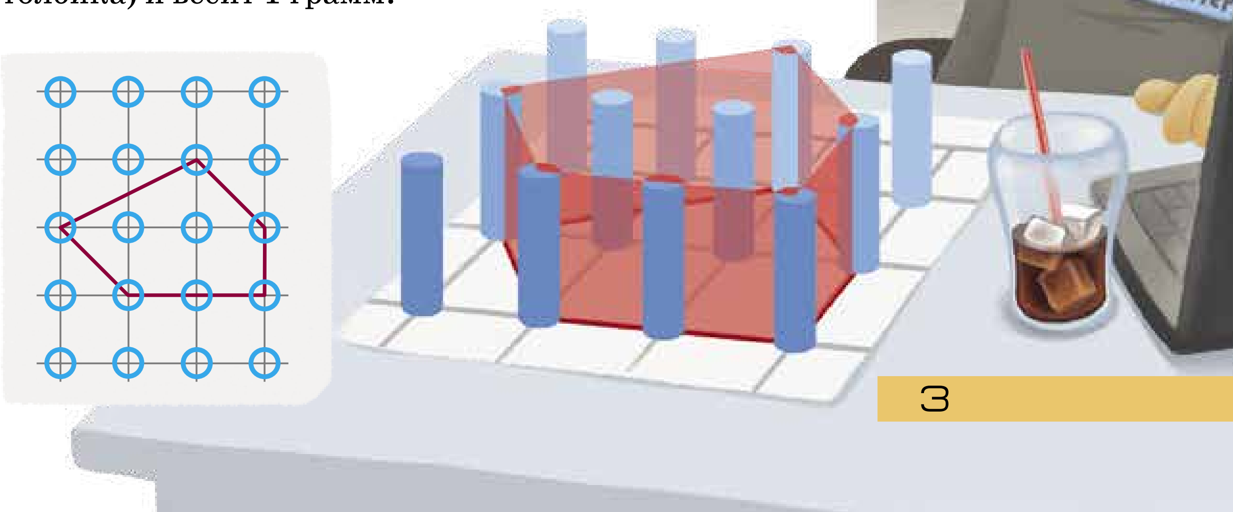
Интересно, что хотя длины сторон у многоугольников обычно совершенно не целые, формула Пика гарантирует, что площадь всегда получится целой или полуцелой.

## ТАЮЩИЙ ЛЁД

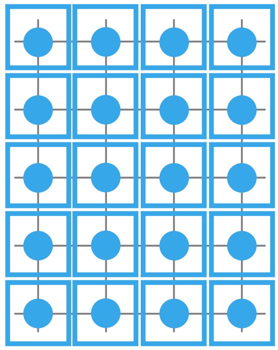
Формула Пика известна с XIX века, и с тех пор у неё появилось много доказательств, но большинство из них не такие уж простые. Мы обсудим предложенный в 1997 году швейцарским математиком Кристианом Блаттером мысленный эсперимент с тающим льдом, который сразу объясняет формулу Пика.

Поставим на каждый узел сетки по одинаковому цилиндрическому столбику изо льда. Каждый столбик очень тонкий (пересекается только с теми сторонами многоугольника, которые проходят через центр столбика) и весит 1 грамм.

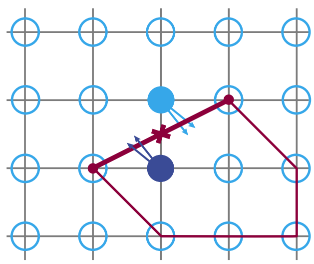


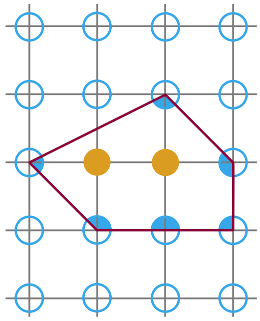
Построим вокруг каждого столбика забор в виде единичного квадратика, после чего растопим весь лёд (во всех квадратиках вода растекается одинаково и симметрично относительно центра своего квадратика). Вся клетчатая плоскость будет равномерно залита водой, и в каждой ячейке площади 1 будет по 1 грамму воды. То есть количество воды в нашем многоугольнике (в граммах) будет равно его площади (в клетках).



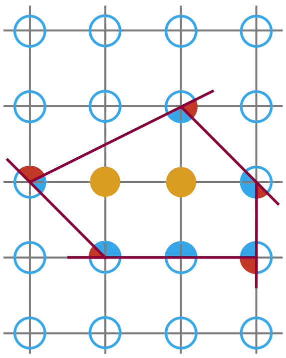
С другой стороны, задумаемся, откуда эта вода попала в наш многоугольник. Посмотрим на какую-нибудь конкретную сторону многоугольника. Если через неё внутрь многоугольника втекла вода из какого-то столбика, то точно столько же воды из *симметричного столбика* (симметричного относительно середины этой стороны) через неё из многоугольника вытекло.



То есть внутри многоугольника ровно *столько воды, сколько в нём было льда*! А сколько в нём было льда? Каждый из узлов сетки внутри многоугольника даёт вклад 1 грамм, общий вес получается $i$ граммов. Узлы на сторонах обычно дают по $\frac{1}{2}$ грамма, но только если это не вершина, для вершины этот вес меньше – так что и общий вес узлов на границе получается не $\frac{b}{2}$ граммов, а меньше.



Насколько меньше? Продлим немного каждую сторону, обходя многоугольник вдоль сторон по часовой стрелке. На рисунке ниже красная часть дополняет каждую из синих частей до половины круга. Но красные части в сумме дают ровно один круг! Ведь, обходя многоугольник по контуру, мы в каждой вершине поворачиваемся на угол, соответствующий красной части, пока не вернёмся в исходную точку, сделав как раз полный оборот.



То есть суммарный вес льда внутри многоугольника равен $i+\frac{b}{2}-1$, и мы получили формулу Пика!

**Упражнение.** *В рассуждении выше мы рисовали выпуклый многоугольник. А изменится ли что-то, если многоугольник станет невыпуклым? А если рассматривать «многоугольники с дырками»?*

Художник Мария Усеинова