Мария Ахмеджанова
Игорь Акулич

Вернёмся к нашим коровам

– Ну вот, а ты тут ещё на учительницу наговариваешь! – воскликнул папа. – Это ведь такая же задача, как на дом задана! Значит, учительница объясняла, как решать такие задачи.

– Где же, – говорю, – такая? Там про плотников, которые строили дом, а здесь про каких-то жестянщиков, которые делали вёдра.

Н. Носов «Витя Малеев в школе и дома». Глава вторая.

В статье «Коровы Исаака Ньютона» из 3-го номера «Кванта», а также 8-го номера «Квантика» за 2016 год подробно рассматривалось решение такой задачи:

Трава на всём лугу растёт одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров поели бы её в 24 дня, а 30 коров – в 60 дней. Сколько коров поели бы всю траву луга в 96 дней?

Основная её трудность – наличие растущей травы, постоянно пополняющей запасы кормов на лугу.

Первый способ решения принадлежал Я. И. Перельману и представлял собой «лобовой» алгебраический подход. Сначала с помощью уравнения определяется ежедневный прирост травы на лугу (в долях от первоначального его запаса), затем вычисляется объём травы, съеденной одной коровой в день, а потом, посредством уже второго уравнения, – искомое количество коров. Безотказно, но громоздко!

Поэтому был предложен второй способ – «физический», в котором сюжет был преобразован следующим образом.

Назовём собственной скоростью катера его скорость при движении в стоячей воде. Если катер поплывёт против течения реки с собственной скоростью 70 км/ч, то он доберётся до пункта назначения за 24 часа, а если поплывёт с собственной скоростью 30 км/ч, то доберётся до пункта назначения за 60 часов. С какой собственной скоростью ему надо плыть, чтобы достичь цели за 96 часов?

Здесь поедание травы превратилось в движение катера по реке, количество коров – в собственную скорость катера, а рост травы – во встречное течение.

Условие, конечно, удлинилось, зато решение сократилось. В самом деле, если обозначить собственную скорость катера через x, а скорость течения через y, то получаем следующее:

$$(70-y)\cdot 24=(30-y)\cdot 60=(x-y)\cdot 96.$$

Найти отсюда x и y проще простого (сделайте это сами).

Однако здесь возникает иная закавыка, родственная эпиграфу к данной статье. Далеко не каждого (и не с первого раза!) вы сумеете убедить, что задачи про коров на лугу и про катер на реке – близнецы-братья. Оно, конечно, как бы похоже, скажет оппонент, но... в полную тождественность не очень-то верится. Вот если бы найти простой подход, не уводящий нас с коровьего луга! Но есть ли такой?

Оказывается, есть. Имеется иное решение – наглядное, для которого вообще не нужны никакие уравнения, поскольку оно чисто арифметическое.

Соль этого (третьего по счёту) решения – удачно введённое понятие «одной порции». Назовём так количество травы, которое съедает одна корова за один день. Этот вполне естественный взгляд на ситуацию многое даёт. Если 70 коров съели траву за 24 дня, то всего они съели $70\times 24 = 1680$ порций. Ну, а 30 коров, употребивших траву за 60 дней, съели $30\times 60 = 1800$ порций. Получается, что во втором случае коровы съели на $1800-1680=120$ порций больше, чем в первом. Почему? Да потому, что во втором случае не только коровы паслись на лугу на $60-24=36$ дней дольше, но и на то же время дольше росла дополнительная трава (которую коровы тоже съели). Поэтому за один день травы на лугу прирастает $120:36=3\frac{1}{3}$ порции[1].

Далее, рассмотрим опять первый случай[2], когда 70 коров съели траву за 24 дня. За эти дни наросло $3\frac{1}{3}\times 24 = 80$ порций, а поскольку всего коровы съели,

[1] Отсюда следует вывод, сделанный также и в упомянутой статье: если коров не больше $3\frac{1}{3}$ (или, если перейти к реальным коровам, не больше 3), то они могут кормиться на лугу неограниченно долго – прирастающей травы им заведомо хватит.

[2] А можно было бы и второй – с тем же результатом.

как мы уже знаем, 1680 порций, то первоначальный запас травы на лугу составлял $1680-80=1600$ порций. За 96 дней к ним добавится $3\frac{1}{3}\times 96=320$ «приросших» порций, и потому общее количество съеденной травы должно равняться $1600+320=1920$ порциям, чего хватит для прокорма $1920:96=20$ коровам.

Интересно, что последнее решение можно «раздвоить» (и получить уже *четвёртое* решение). После того как мы обнаружили, что за день запас травы на лугу прирастает на $3\frac{1}{3}$ порции, можно продолжить рассуждения чуть в ином направлении.

Давайте мысленно запустим на луг *ровно* $3\frac{1}{3}$ коровы[3]. Очевидно, они каждый день будут съедать в точности столько травы, сколько её за этот день наросло, и потому являются своеобразными компенсаторами, «обнуляющими» эту самую добавку. А всё остальное стадо (сверх $3\frac{1}{3}$ коров) – «активные» коровы, которые уничтожают неизменный первоначальный запас корма. Опять-таки, рассмотрим первый случай, когда было 70 коров. Отбросим коров-компенсаторов – остаётся $70-3\frac{1}{3}=66\frac{2}{3}$ коров. Им хватило травы на 24 дня. А чтобы её хватило на 96 дней, активных коров должно стать меньше в обратной пропорции, то есть $66\frac{2}{3}\times\frac{24}{96}=16\frac{2}{3}$. Добавив временно отброшенных компенсаторов, получаем окончательный ответ: $16\frac{2}{3}+3\frac{1}{3}=20$ коров.

Предоставляем читателю самому выбрать, какой из предложенных способов решения ему больше нравится и представляется самым удачным. Тем, кто выберет последние, предлагаем с их помощью решить ещё одну задачу, тоже изложенную в статье «Коровы Исаака Ньютона»:

Три луга, покрытые травой одинаковой густоты и скорости роста, имеют площади: $3\frac{1}{3}$ *га,* 10 *га и* 24 *га. Первый прокормил* 12 *быков в продолжение* 4 *недель; второй* – 21 *быка в течение* 9 *недель. Сколько быков может прокормить третий луг в течение* 18 *недель?*

[3] Кого коробит нецелое число коров, пусть представит себе трёх коров и одну козу с аппетитом втрое меньше, чем у коровы.

Художник Мария Усеинова