

Найди ДОПОЛНЕНИЕ

Большинство из вас наверняка знают приём, позволяющий сравнивать некоторые дроби с разными знаменателями. Тем не менее, напомним.

Пример 1. Какое из двух чисел больше:

$$\frac{55555553}{55555557} \text{ или } \frac{66666663}{66666667} ?$$

Решение. Будем сравнивать не сами числа, а их *дополнения* до 1:

$$1 - \frac{55555553}{55555557} = \frac{4}{55555557}; \quad 1 - \frac{66666663}{66666667} = \frac{4}{66666667}.$$

Но $\frac{4}{66666667} < \frac{4}{55555557}$, откуда $\frac{55555553}{55555557} < \frac{66666663}{66666667}$.

Ответ: первая дробь меньше.

Оказывается, этот приём – найти *дополнение* – можно использовать не только в арифметических задачах, но и в алгебраических, логических, комбинаторных и вероятностных.

Пример 2. Учитель задал на уроке сложную задачу. Количество мальчиков, решивших эту задачу, оказалось равно количеству девочек, её не решивших. Кого в классе больше – решивших задачу или девочек?

Решение. Рассмотрим количество девочек, решивших задачу, и его *дополнения* до искомым величин. До количества решивших задачу его дополняют мальчики, её решившие, а до количества всех девочек – девочки, её не решившие. По условию, дополняемые количества равны, откуда равны и искомые.

Ответ: одинаково.

Пример 3. С полудня до полуночи Кот Учёный спит под дубом, а с полуночи до полудня рассказывает сказки. На дубе он повесил плакат: «Через час я буду делать то же самое, что делал два часа назад». Сколько часов в сутки эта надпись верна?

Решение. Найдём *дополнение* до искомой величины, то есть вычислим промежутки времени в сутках, в которые надпись *неверна*. Они начинаются за час до того момента, когда Кот меняет вид деятельности, и продолжаются ещё 2 часа после этого момен-



та. Таким образом, надпись неверна с 11 до 14 часов и с 23 часов до 2 часов, то есть 6 часов в сутки. Следовательно, в остальное время суток надпись верна.

Ответ: 18 часов.

Пример 4. В коробке 7 шаров: 5 белых и 2 красных. Сколькими способами можно выбрать наугад 2 шара, среди которых есть хотя бы один красный?

Решение. Найдём сначала количество способов выбрать из коробки любые два шара. Первый шар можно выбрать семью способами, и для каждого из них есть шесть способов выбрать второй шар; но эти же два шара можно получить, выбирая их в обратном порядке. Следовательно, количество способов выбрать любые два шара равно $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$. А теперь найдём *дополнение* к искомой величине: количество способов выбрать два белых шара. Для этого достаточно выбирать два шара из пяти белых шаров. Рассуждая аналогично, получим, что это можно сделать $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ способами.

Следовательно, искомое количество способов равно $21 - 10 = 11$.

Ответ: 11.

Для тех, кто знает, что такое сочетания, приведём формулы, которые можно было использовать для подсчёта: $C_7^2 = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$ и $C_5^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$.

Пример 5. Петя, а также ещё 9 мальчиков и 10 девочек в случайном порядке рассаживаются за круглым столом. Мальчик доволен, если рядом с ним окажется девочка (хотя бы с одной стороны). Какова вероятность того, что Петя будет доволен?

Решение. Найдём вероятность того, что Петя недоволен. Это произойдёт, если его соседями окажутся два мальчика. Так как с одной стороны от него может сесть любой из девятнадцати, а с другой стороны — любой из остальных восемнадцати, то вероятность этого равна $\frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18} = \frac{4}{19}$. Искомое событие *противоположно*, поэтому *дополняет* найденную вероятность до 1. Следовательно, его вероятность равна $1 - \frac{4}{19} = \frac{15}{19}$.

Ответ: $\frac{15}{19}$.



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Сравните: $\frac{77 \dots 7}{77 \dots 7} \frac{99}{100}$ и $\frac{55 \dots 5}{55 \dots 5} \frac{100}{101}$.

2. В одну из чашек налили кофе, а в другую – столько же молока. Ложку молока перелили в чашку с кофе, а затем ложку получившейся смеси перелили обратно в чашку с молоком. Чего больше – молока в чашке кофе или кофе в чашке молока?

3. В классе организуется турнир по перетягиванию каната. В турнире ровно по одному разу должны участвовать всевозможные команды, которые можно составить из учащихся этого класса (кроме команды всего класса). Докажите, что каждая команда учащихся будет соревноваться с командой всех остальных учащихся класса.

4. Баба Яга в своей избушке на курьих ножках завела сказочных животных. Все они, кроме двух, – Говорящие Коты; все, кроме двух, – Мудрые Совы; остальные – Усатые Тараканы. Сколько сказочных животных в избушке у Бабы Яги? (Все перечисленные животные в избушке есть.)

5. В коробке лежат фрукты (не менее пяти). Если вытащить наугад три фрукта, то среди них обязательно найдётся яблоко. Если вытащить наугад четыре фрукта, то среди них обязательно найдётся груша. Какие фрукты могут быть вытащены, если взять наугад пять фруктов?

6. Дана таблица размером 3×3 клетки. Сколько существует способов поставить в четыре её клетки четыре одинаковые фишки так, чтобы никакие три не стояли в один ряд (ни по вертикали, ни по горизонтали, ни по диагонали)?

7. Петя предлагает Васе сыграть в следующую игру. Есть две коробки, в каждой из них шоколадные конфеты и карамельки. Всего в обеих коробках 25 конфет. Петя предлагает Васе взять из каждой коробки по конфете. Если обе конфеты окажутся шоколадными, то Вася выиграл. В противном случае выиграл Петя. Вероятность того, что Васе достанутся две карамельки, равна 0,54. У кого больше шансов на победу?

8. Три усталых ковбоя зашли в салун и повесили свои шляпы на бизоний рог при входе. Когда глубокой ночью ковбои уходили, они были не в состоянии отличить одну шляпу от другой и поэтому разобрали три шляпы наугад. Найдите вероятность того, что хотя бы один из них взял собственную шляпу.

