XIII Южный математический турнир. Избранные задачи



Турнир проводится Кавказским математическим центром Адыгейского госуниверситета и Адыгейской республиканской естественно-математической школой каждый сентябрь во Всероссийском детском центре «Орлёнок». В турнире участвуют более 150 школьников с 7 по 11 класс, разбившись на команды по 6 человек. Ребята не только сражаются в математических боях, но и слушают лекции, купаются в море. Приводим избранные задачи боёв лиги «Старт» (полный отчёт см. по ссылке adygmath.ru/umt18.html).

Арифметика и алгебра

- 1. (Из украинских олимпиад) Из A в B выехал гонщик, а спустя некоторое время другой гонщик выехал из B в A. Скорости гонщиков постоянны, но, возможно, различны. Гонщики встретились в точке C лицом к лицу, развернулись и поехали назад. Доезжая до своего начального пункта, каждый гонщик разворачивается и снова едет до встречи с другим гонщиком, разворачивается, и т. д. Вторая встреча произошла опять лицом к лицу, но уже в точке D. В какой из точек отрезка AB произойдёт сотая встреча?
- **2.** (*М.Кузнецов*) Найдите наибольшее целое число из различных цифр, в котором любые три подряд идущие цифры образуют трёхзначное простое число.
- 3. (По задаче из украинских олимпиад) На полке в ряд помещаются 9 одинаковых толстых учебников, а 10 уже не помещаются. Также на этой полке помещаются 15 одинаковых тонких учебников, а 16 уже не помещаются. Вася поставил на полку 5 тонких учебников. Какое наибольшее количество толстых учебников он сможет ещё разместить на полке?
- **4.** (А. Экштейн) Десятичные записи чисел 1, 2, 2^2 , 2^3 , ..., 2^{2018} выписаны друг за другом в строчку. Какая наибольшая степень двойки делит полученное число?
- 5. (M. $\mathcal{A}u\partial u\mu$) Можно ли отметить на плоскости 2018 различных точек так, чтобы все попарные расстояния между ними, кроме одного, были целыми?

Геометрия

6. (В. Расторгуев) На плоскости дан отрезок AB. Рассматриваются выпуклые пятиугольники ABXYZ, лежащие по одну сторону от AB и такие, что BX = AZ, $\angle BXY = \angle XYZ = \angle YZA = 90^\circ$. Докажите, что биссектрисы всех углов XYZ проходят через одну точку.



XIII Южный математический ОЛИМПИАДЫ турнир. Избранные задачи



- 7. (Из украинских олимпиад) Внутри треугольника ABC выбрана такая точка P, что BC = AP и $\angle APC$ + $+ \angle ABC = 180^{\circ}$. На стороне AB выбрана такая точка K, что AK = KB + PC. Докажите, что $CK \perp AB$.
- **8.** (Π . *Емельянов*) Внутри треугольника ABC лежит точка D. Для какой точки X на плоскости сумма расстояний XA + XB + XC + XD наименьшая?
- **9.** (*Л.Емельянов*) Тройка диагоналей пятиугольника называется *удачной*, если из них можно составить треугольник. Какое наименьшее возможное число удачных троек может быть в выпуклом пятиугольнике?

Комбинаторная геометрия

- **10.** (M.Кузнецов) Докажите, что любой клетчатый квадрат с нечётной стороной и вырезанной центральной клеткой можно разрезать на Γ -тетрамино (см. рисунок).
- 11. (С. Волчёнков) Планета Тор имеет форму бублика. Можно ли на этой планете разместить 4 города, 4 космодрома и проложить дороги от каждого города к каждому космодрому, чтобы никакие две дороги не имели общих точек, кроме концов?
- 12. (C. Волчёнков) Из 8 вершин куба по рёбрам поползли 8 муравьёв. Каждый муравей может ползать по рёбрам как угодно, но не превышая скорости 1 ребро в минуту. Через t минут оказалось, что каждая пара муравьёв уже встречалась (оказывалась в одной точке). Найдите наименьшее возможное значение t.
- 13. (M.Кузнецов) Дана белая клетчатая доска $n \times n$. При каких натуральных k после покраски любых k клеток доски в чёрный цвет её можно разрезать по линиям сетки на k прямоугольников так, что в каждом прямоугольнике будет ровно одна чёрная клетка?

Логика и комбинаторика

14. (*М.Дидин*) На острове рыцарей (всегда говорят правду) и лжецов (всегда лгут) некоторые жители знакомы между собой (знакомство взаимно). Турист встретил 10 аборигенов. Каждый абориген сказал про каждого из остальных 9 аборигенов одну из фраз: «Я

XIII Южный математический турнир. Избранные задачи

его не знаю», «Это мой знакомый рыцарь», «Это мой знакомый лжец». Любые двое сказали друг о друге разные фразы. Про какое наибольшее число аборигенов турист сможет гарантированно узнать, кто они?

- 15. (Фольклор) Даша разместила в Инстаграме 5 фото. Каждое фото «лайкнули» более половины её друзей (а друзей у Даши очень много). Докажите, что у Даши найдутся такие два друга, что каждое фото «лайкнул» хотя бы один из них.
- **16.** (По задаче из украинских олимпиад) В клубе джентльменов каждые двое либо друзья, либо враги. У каждого ровно 75 врагов, причём выполняется правило «Враг моего друга мой враг». Сколько джентльменов могло быть в клубе?
- 17. (С. Волчёнков) На доске написаны числа 201 и 301. Играют Саша и Катя. Начинает Саша. За один ход можно вычесть из меньшего числа 2 или вычесть из большего числа 3 (если перед ходом игрока числа равны, то он может из одного из чисел вычесть или 2, или 3). Выигрывает тот, кто первым получит отрицательное число. У кого есть выигрышная стратегия?
- 18. (Из эстонских олимпиад) 2^n солдат выстроены в шеренгу. По команде «Перестрой-СЯ!» они рассчитываются на первый-второй, после чего первые становятся в начало шеренги (в том же порядке по отношению друг к другу, что и перед этим), а после них становятся вторые (тоже сохраняя своё взаимное расположение). Например, солдаты, стоящие в порядке 12345678, после такой команды становятся в порядке 13572468. Докажите, что после n команд «Перестрой-СЯ!» солдаты вернутся к исходному порядку.
- 19. (Задача из Саудовской Аравии) На какое наименьшее число слоновых троп можно разбить белые клетки шахматной доски 10×10 ? Слоновья тропа это последовательность клеток, в которой у каждых двух последовательных клеток ровно одна общая точка.
- **20.** (Φ ольклор) Дано целое число $n \ge 8$. При каком наибольшем k на доске $n \times n$ можно покрасить k клеток так, чтобы никакие центры четырёх покрашенных клеток не были вершинами параллелограмма?

KAKAS

CNOHOBBÁ

TPOTA !



и составители лиги «Старт»

Художник Сергей Чуб

/ Сергей Волчёнков, Сергей Дориченко, Павел Кожевников, Дмитрий Кузнецов

ОЛИМПИАДЫ

25

APARUA

JOBCKAS