

7 и 21 октября 2018 года состоялся осенний тур XL Турнира городов – международного математического соревнования для школьников. Приводим базовый и сложный варианты для 8–9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов (баллы за пункты одной задачи суммируются).

### Базовый вариант

**1 (4 балла).** Окружность, проходящая через вершину  $B$  прямого угла и середину гипотенузы прямоугольного треугольника  $ABC$ , пересекает катеты этого треугольника в точках  $M$  и  $N$ . Оказалось, что  $AC = 2MN$ . Докажите, что  $M$  и  $N$  – середины катетов треугольника  $ABC$ .

*Михаил Евдокимов*

**2 (4 балла).** Найдите все натуральные  $n$ , удовлетворяющие условию: числа  $1, 2, 3, \dots, 2n$  можно разбить на пары так, что если сложить числа в каждой паре и результаты перемножить, получится квадрат натурального числа.

*Фольклор*

**3.** Клетчатый прямоугольник размера  $7 \times 14$  разрезали по линиям сетки на квадраты  $2 \times 2$  и уголки из трёх клеток. Могло ли квадратов получиться

- а) (1 балл) столько же, сколько уголков;
- б) (3 балла) больше, чем уголков?

*Михаил Евдокимов*

**4 (5 баллов).** У Насти есть пять одинаковых с виду монет, среди которых три настоящие – весят одинаково – и две фальшивые: одна тяжелее настоящей, а вторая на столько же легче настоящей. Эксперт по просьбе Насти сделает на двухчашечных весах без гирь три взвешивания, которые она укажет, после чего сообщит Насте результаты. Может ли Настя выбрать взвешивания так, чтобы по их результатам гарантированно определить обе фальшивые монеты и указать, какая из них более тяжёлая, а какая более лёгкая?

*Рустэм Женодаров*

**5 (5 баллов).** Назовём девятизначное число *красивым*, если все его цифры различны. Докажите, что



существует по крайней мере 1000 красивых чисел, каждое из которых делится на 37.

*Михаил Евдокимов*

### Сложный вариант

**1 (5 баллов).** В треугольнике  $ABC$  точка  $M$  – середина стороны  $BC$ , точка  $E$  – произвольная точка внутри стороны  $AC$ . Известно, что  $BE \geq 2AM$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  тупоугольный.

*Наири Седрякян*

**2 (6 баллов).** На острове живут рыцари, лжецы и подпевалы; каждый знает про всех, кто из них кто. В ряд построили всех 2018 жителей острова и попросили каждого ответить «Да» или «Нет» на вопрос: «На острове рыцарей больше, чем лжецов?». Жители отвечали по очереди и так, что их слышали остальные. Рыцари отвечали правду, лжецы лгали. Каждый подпевала отвечал так же, как большинство ответивших до него, а если ответов «Да» и «Нет» было поровну, давал любой из этих ответов. Оказалось, что ответов «Да» было ровно 1009. Какое наибольшее число подпевал могло быть среди жителей острова?

*Михаил Кузнецов*

**3 (8 баллов).** Требуется записать число вида  $77\dots7$ , используя только семёрки (их можно писать и по одной, и по несколько штук подряд), причём разрешены только сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень, а также скобки. Для числа 77 самая короткая запись – это просто 77. А существует ли число вида  $77\dots7$ , которое можно записать по этим правилам, используя меньшее количество семёрок, чем в его десятичной записи?

*Сергей Маркелов*

**4 (8 баллов).** Доска  $7 \times 7$  либо пустая, либо на ней лежит «по клеткам» невидимый корабль  $2 \times 2$ . Разрешается расположить в некоторых клетках доски по детектору, а потом одновременно их включить. Включённый детектор сигнализирует, если его клетка занята кораблём. Какого наименьшего числа детекторов хватит, чтобы по их показаниям гаранти-





рованно определить, есть ли на доске корабль, и если да, то какие клетки он занимает?

*Рустэм Женодаров*

**5 (8 баллов).** Равнобокая трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  вписана в окружность с центром  $O$ . Прямая  $BO$  пересекает отрезок  $AD$  в точке  $E$ . Пусть  $O_1$  и  $O_2$  – центры окружностей, описанных около треугольников  $ABE$  и  $DBE$  соответственно. Докажите, что точки  $O_1, O_2, O, C$  лежат на одной окружности.

*Алексей Заславский*

**6.** Докажите, что

**а) (7 баллов)** любое число вида  $3k - 2$ , где  $k$  целое, есть сумма одного квадрата и двух кубов целых чисел;

**б) (3 балла)** любое целое число есть сумма одного квадрата и трёх кубов целых чисел.

*Наири Седрякян*

**7.** В виртуальном компьютерном государстве не менее двух городов. Некоторые пары городов соединены дорогой, причём из любого города можно добраться по дорогам до любого другого (здесь и далее переходить с дороги на дорогу разрешается только в городах). Если при этом невозможно, начав движение из какого-то города и не проходя дважды по одной и той же дороге, вернуться в этот город, государство называется *простым*, иначе – *сложным*.

Петя и Вася играют в такую игру. В начале игры Петя указывает на каждой дороге направление, в котором по ней можно двигаться, и помещает в один из городов туриста. Далее за ход Петя перемещает туриста по дороге в разрешённом направлении в соседний город, а Вася в ответ меняет направление одной из дорог, входящей или выходящей из города, куда попал турист. Вася победит, если в какой-то момент Петя не сможет сделать ход. Докажите, что

**а) (5 баллов)** в простом государстве Петя может играть так, чтобы не проиграть, как бы ни играл Вася;

**б) (7 баллов)** в сложном государстве Вася может гарантировать себе победу, как бы ни играл Петя.

*Максим Дидин*

Материал подготовил  
Сергей Дориченко  
Художник Сергей Чуб

