Игорь Акулич

ОГОРОДНОЕ ЗАНЯТИЕ

– А нынешнему занятию кружка самое подходящее название – «огородное». Нет, вилы и лопаты я не принёс, обойдёмся без них. А начать позвольте с воспоминаний. Я ведь тоже когда-то учился в школе и кроме математики увлекался тогда и физикой. Однажды на физической олимпиаде попалась мне такая задача:

Барон Мюнхгаузен рассказывал, что однажды, разбежавшись, пытался перепрыгнуть широкий ров. Но уже оторвавшись от земли, он понял, что набранная им скорость недостаточна, и до противоположного края долететь не удастся. Тогда барон развернулся в полёте и вернулся на исходный берег. Почему это невозможно?

По причине некоторой нервозности я неверно прочёл вопрос и воспринял его так: «Почему это возможно?». И знаете – за отведённое время мне почти удалось это доказать![1] И лишь в самом конце я заметил, что ошибся при чтении. Это так меня расстроило, что олимпиаду я провалил. С тех пор в физике разочаровался и полностью сосредоточился на математике.

– А при чём здесь огород?

– При том, что как-то попалась мне на глаза вот такая задача Михаила Евдокимова[2]:

У Умного Кролика есть участок квадратной формы 8×8, состоящий из 64 одинаковых грядок 1×1. На некоторых грядках он выращивает капусту, а на остальных морковь (пустых грядок нет). Известно, что рядом с каждой капустной грядкой ровно две капустные, а рядом с каждой морковной ровно две морковные (грядки находятся рядом, если они соседние по стороне). Может ли доля капустных грядок составлять

а) ровно половину;

б) более 60 % от общего числа грядок?

Давайте с неё и начнём. Какие есть соображения?

– С половиной ясно – разбиваем на квадраты 2×2!

– Это как?

[1] Между прочим, реальный случай, произошедший с одним из знакомых автора (ныне академиком).

[2] См. «Квантики» № 9 (условие) и № 11 (решение) за 2017 год.

– А вот так (рис. 1)! Тёмные – капустные грядки, белые – морковные.

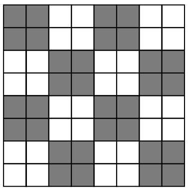

Рис. 1

– Да, верно. Такое решение само просится. А как насчёт 60 процентов?

– Наверно, невозможно... Для капусты – два соседа, и для морковки – два соседа. Так что, скорее всего, может быть только поровну.

– Не спешите с выводами. Подумайте: если каждая капустная грядка соседствует с двумя капустными, то, соединив все такие соседние грядки между собой условными линиями, получим что-то вроде *кольца*. На приведённом примере все эти кольца содержат по четыре грядки, но ведь может быть иначе...

– А, ясно! Вложенные кольца!

– Намёк понятен. Покажите всем свою идею.

– Вот она (рис. 2)! Капустных грядок здесь... сейчас посчитаю... ровно 40, и это составляет $40/64 = 0{,}625$, то есть больше 60 процентов!

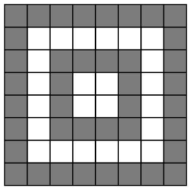

Рис. 2

– Молодец! Теперь задача решена полностью. Но не будем с ней расставаться. Дело в том, что когда я читал её условие, возникла почти ситуация «дежа вю». А именно: я почему-то воспринял дело так, что с каждой капустной грядкой должны соседствовать две *морковные*, а с каждой морковной – две *капустные*. И потому ответ меня несказанно возмутил. Посмотрите, скажем, на угловые грядки обоих рисунков! Сначала подумал – вопиющая опечатка, и лишь затем сообразил, что смотрел в книгу, а видел фигу...

– Не в книгу, а в журнал.

– Непринципиально. Но нет худа без добра. По сути, эта ошибка породила новую задачу, в которой грядки соседствуют по-иному. А давайте-ка её решим! Вопросы те же – про половину и про 60 %. Думайте!

(*Долгая пауза*)

– Что, не очень-то выходит?

– Не очень... А вообще такое расположение грядок возможно?

– Возможно! Даю подсказку: к нему приведёт небольшая трансформация рисунка 1. Попробуйте!

(*Недолгая пауза*)

– Готово! Сначала переносим направо самый левый столбец, а потом вниз – самую верхнюю строку (рис. 3). Значит, ровно половина (пункт «а») достижима.

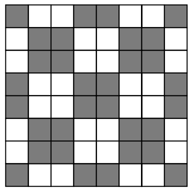

Рис. 3

– Верно. А как насчёт 60 процентов?

(*Очень долгая пауза*)

– Что приуныли? Ага, вижу: перебираете варианты. Действительно, кроме рисунка 3, по идее, надо бы рассмотреть другие возможные расположения, а потом отобрать те из них, где доля капустных грядок наибольшая. Правильно?

– Да...

– А на самом деле – нет!

– Почему?

– Для ответа на этот вопрос приведу широко известную задачу Вячеслава Викторовича Произволова[3]:

На балу каждый кавалер танцевал с тремя дамами, а каждая дама – с тремя кавалерами. Докажите, что на балу число дам равнялось числу кавалеров.

Решается она почти мгновенно. Определим двумя способами число различных танцевавших пар. Если число кавалеров принять за k, то число пар было $3k$, так как каждый кавалер танцевал с тремя дамами. Если число дам принять за m, то число пар было $3m$, так как каждая дама танцевала с тремя кавалерами. Значит, $3k = 3m$, откуда $k = m$. Всё! Подумайте, нельзя ли использовать такой же подход в нашем огороде.

– А, понятно! Будем считать, что соседние грядки с разными овощами попарно «танцуют». Пусть число капустных грядок равно k, а морковных – m. Тогда с одной стороны число «танцевальных пар» равно $2k$, а с другой – $2m$. Значит, $2k = 2m$, откуда $k = m$.

– Вот видите, прежде чем бросаться в атаку, порой следует продумать обходной манёвр. На сегодня всё, а на дом оставляю вам такую задачу:

Может ли Кролик так рассадить овощи на своём огороде, чтобы каждая капустная грядка граничила с ***двумя морковными****, а каждая морковная – с* ***одной капустной****?*

Попробуйте и вы разобраться с последней задачей. Если не получится – посмотрите в «Ответы».

[3] См., например, книгу В.Произволова «Задачи на вырост», §1, задача 1.

Художник Алексей Вайнер