№ 3 | март 2019
Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования
e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ КВАНТИК ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 3
март
2019

АРХИМЕД

ТЕОРЕМА О СЕМИ ОКРУЖНОСТЯХ

МЫШЬ ЧЕТЫРЁХМЕРНАЯ

Enter

ОФОРМИТЬ ПОДПИСКУ НА ЖУРНАЛ «КВАНТИК»
можно в любом отделении связи Почты России или через интернет

Подписка на почте

«КАТАЛОГ РОССИЙСКОЙ ПРЕССЫ» МАП
Индекс **11346**

КАТАЛОГ «ГАЗЕТЫ. ЖУРНАЛЫ» АГЕНТСТВА «РОСПЕЧАТЬ»
Индекс **84252**

Подписка на сайте vipishi.ru

КАТАЛОГ РОССИЙСКОЙ ПРЕССЫ
оплата онлайн
Индекс **11346**

VIPISHI.RU

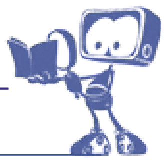
Жители дальнего зарубежья могут подписаться на журнал на сайте **nasha-pressa.de**
Подробнее обо всех видах подписки читайте на сайте **kvantik.com/podpiska.html**
Электронную версию журнала «Квантик» вы можете приобрести на сайте **litres.ru**

НАШИ НОВИНКИ

Кроме журнала редакция «Квантика» выпускает альманахи, календари загадок, наборы плакатов и книги серии «Библиотечка журнала «Квантик»

Недавно вышли в свет:

* Альманах «Квантик». Выпуск 12,
* Альманах «Квантик». Выпуск 13,
* второй выпуск «Библиотечки журнала «Квантик» – книга С. Н. Федина «Перепутаница».



Всю продукцию «Квантика» можно купить в магазине «Математическая книга» по адресу: г. Москва, Большой Власьевский переулок, д. 11 (сайт: **biblio.mccme.ru**), в интернет-магазине **kvantik.ru**, в магазинах «Библио-Глобус» и в других магазинах (список на сайте: **kvantik.com/buy**)

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 3, март 2019 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор: С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Е. А. Котко, Р. В. Крутовский, И. А. Маховая, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Yustas

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях связи Почты России:
▪ Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)
▪ «Каталог Российской прессы» МАП (индексы **11346** и **11348**)
Онлайн-подписка по «Каталогу Российской прессы» на сайте **vipishi.ru**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 5000 экз.
Подписано в печать: 21.02.2019
Отпечатано в типографии ООО «ТДДС-Столица-8»
Тел.: (495) 363-48-84
http://capitalpress.ru
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

СОДЕРЖАНИЕ

Максим Волчкевич

АРХИМЕД

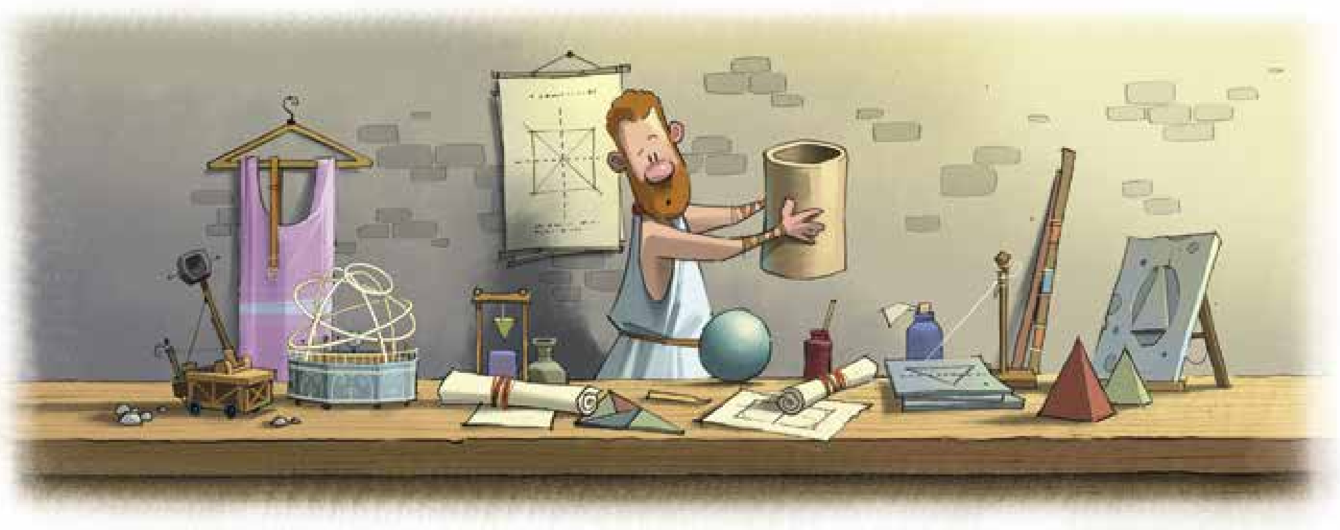
Вы можете спросить: кто из древних учёных был самым гениальным? Трудно сказать – все они были гении. Но самым разносторонним из них был точно Архимед. Архимеда одинаково интересовали и математика, и физика, и астрономия. А ещё он был выдающимся инженером. Родился Архимед в городе Сиракузы на острове Сицилия – на карте этот остров напоминает «мяч», по которому носком ударил «сапог» Италии. Его отец Фидий был астрономом и, конечно, привил Архимеду любовь к математике и астрономии. Впрочем, настоящей наукой Архимед стал заниматься лишь в возрасте 40 лет. Лучше поздно, чем никогда – говорит известная всем пословица. За оставшиеся 35 лет жизни Архимед сделал больше, чем все его современники, вместе взятые!

Профиль Архимеда на медали Филдса – самой престижной награде в области математики

С юности Архимеда интересовали всевозможные механизмы, и некоторые свои изобретения он сделал в молодости. Но известно, что примерно в 40 лет Архимед отправился в Александрию и познакомился там с Эратосфеном, астрономом Кононом и другими учёными мужами. Александрия тогда была главным научным центром античного мира. Незадолго до рождения Архимеда там работал Евклид, написавший «Начала» – знаменитую книгу, по которой весь мир потом изучал геометрию две тысячи лет. Эратосфен в Александрии вычислил размер земного шара, а Аристарх Самосский – расстояние до Луны и Солнца.

А ещё там была величайшая в мире библиотека (в какой-то момент в ней хранилось примерно полмиллиона книг!). Эту библиотеку, как и саму Александрию, основал царь Птолемей – один из военачальников Александра Македонского. Из всех царей того времени он был самым умным, ценил литературу и науку, собирал книги со всего света и приглашал в Александрию известных учёных.

По материалам учебника геометрии для 7 класса школ проекта «Математическая вертикаль» г. Москвы

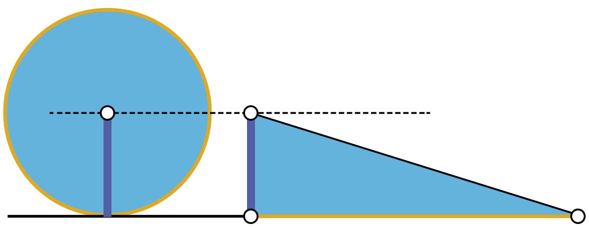


Каждая книга представляла собой свиток – свёрнутую в трубку рукопись на длинной полосе папируса.

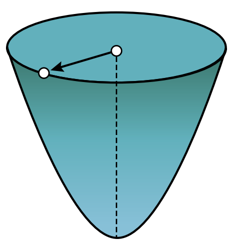
Рассказывают, что однажды Птолемей решил изучить геометрию. Он позвал Евклида и попросил указать ему самый лёгкий для этого способ. Евклид ответил так: «В геометрии нет царской дороги!». С тех пор это высказывание стало афоризмом.

Проведя несколько лет в Александрии, Архимед вернулся в Сиракузы и стал писать в Александрию научные письма. Приходили они на имя одного из учеников Конона – Досифея, и каждое начиналось так: «Архимед приветствует Досифея». В этих письмах Архимед сообщал удивительные вещи: как можно вычислить площадь круга или найти центр тяжести параболоида, какую часть от объёма всего цилиндра занимает вписанный в этот цилиндр шар, и многое другое. Для всех этих фигур он получал абсолютно точные формулы, а ведь шар или параболоид – «кривые» тела, греки с ними работать тогда ещё не умели. Каждое письмо Архимеда было открытием, а его методы были совсем не «элементарны» – можно даже сказать, что за два века до нашей эры он первым открыл «высшую» математику!

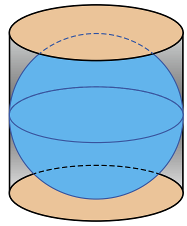
Архимед очень гордился тем, как он вычислил объём шара, и просил изобразить на его могильной плите шар внутри цилиндра, а рядом написать соотношение их объёмов. Об этом через 150 лет после его смерти вспомнил римский оратор Цицерон, поехал в Сиракузы и по данному чертежу нашёл могилу Архимеда. По его словам, вся она заросла терновником.



Круг по площади равен треугольнику, высота которого – радиус, а основание – длина окружности

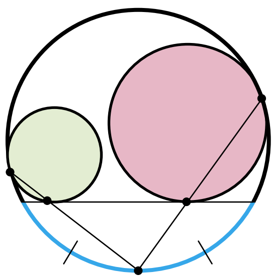


Параболоид



Объём шара составляет 2/3 от объёма цилиндра

Архимед много занимался элементарной геометрией – в школе проходят его знаменитую лемму об окружностях[1], иногда решают задачу об *арбелосе* – ноже, которым в Сиракузах разделывали кожи животных. Посмотрите на его чертежи: Архимед доказал, что две окружности, вписанные в части любого арбелоса, равны друг другу. Ни одному кожевеннику это не пришло бы в голову!

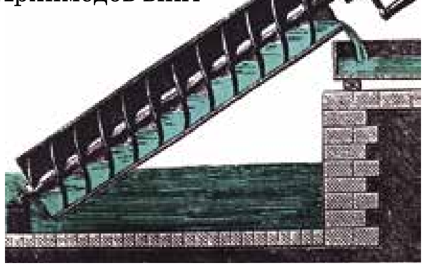


Лемма Архимеда об окружностях

Теорема об арбелосе

Но больше всего народ уважал Архимеда не за это: всеобщее восхищение вызывали его инженерные изобретения. Он придумал, как специальным винтом поднимать воду из реки в город, как с помощью блоков и верёвок переносить огромные тяжести. (Кстати, архимедов винт до сих пор используют в обычной мясорубке!) Однажды правитель Сиракуз Гиерон повелел построить корабль в подарок египетскому царю – внуку того Птолемея, который разговаривал с Евклидом. Корабль получился столь большим и тяжёлым, что его не могли сдвинуть с места все жители Сиракуз. Тогда Гиерон попросил помощи у Архимеда. Тот смастерил такую систему блоков и рычагов, что смог в одиночку спустить этот корабль на воду. Гиерон был в полном восторге. Архимед же сказал так: «Дай мне точку опоры, и я тебе сдвину Землю!».

Архимедов винт



Архимед был так поглощён наукой, что временами забывал есть и пить. Сидя перед очагом, он чертил круги и треугольники прутом на золе, а когда ходил в общественную баню –

[1] Эта лемма состоит в том, что если какая-то окружность касается одного сегмента круга в двух точках, то проходящая через них прямая всегда делит дугу другого сегмента пополам.

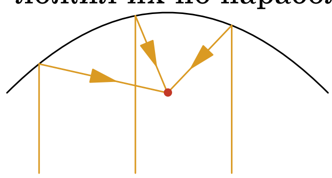
на своём намазанном маслом теле. Именно в бане он и сделал ещё одно выдающееся открытие. Дело было вот в чём. Как-то Гиерон приказал своему мастеру сделать золотой венец, отвесив для этого нужную меру золота. Венец он получил, но в то же время получил и донос, что мастер утаил часть золота и заменил его серебром. Проверить это не было никакой возможности – ведь венец был нужного веса, а его форма была слишком сложной для измерений. Гиерон опять обратился за помощью к Архимеду. Тот стал думать над этим вопросом и как раз отправился в баню. Принимая там ванну, он увидел, что чем больше погружается в ванну его тело, тем больше выливается из неё воды… Наверняка каждый в своей жизни наблюдал нечто подобное. Но Архимед выскочил из ванны и, не одеваясь, прямо по улице побежал домой, громко крича: «Эврика! Эврика!» – что означало: «Нашёл! Нашёл!». Дальше всё было просто: дома он сделал два слитка того же веса, что и у венца – один из золота, другой из серебра. Он погружал эти слитки в воду и смотрел, сколько они вытесняют воды. Оказалось, что серебряный слиток вытесняет воды больше, чем золотой. Тогда он погрузил в воду «золотой» венец и увидел, что он тоже вытесняет больше воды, чем нужно. Так Архимед установил, что мастер подмешал в венец серебро и даже определил, сколько именно он утаил золота. Но главное – Архимед открыл закон: при погружении в воду тело всегда вытесняет количество воды, равное объёму самого тела. Это наблюдение стало первым в его исследованиях свойств жидкостей.

В его книге «О плавающих телах» им были впервые сформулированы законы гидростатики. Архимед мыслил жидкость не как сплошное единое вещество, но как бы состоящую из мельчайших частиц (на современном языке – молекул). Все эти частицы «давят» друг на друга, причём каждая испытывает давление частиц, находящихся сверху. «Более сдавленные» частицы вытесняют «менее сдавленные» и т. д. Из этого Архимед логически вывел, что на одной глубине все частицы должны испытывать равное давление друг на друга, а поверхность моря или любой другой свободной жидкости (даже в чашке или корыте!) долж-

на быть частью сферы, центр которой находится в центре Земли. Почему тяжёлые корабли не тонут в воде, а держатся на её поверхности? А всё дело в том, что снизу на их днища действует выталкивающая сила, равная массе вытесненной этими кораблями воды! Этот знаменитый закон справедливо носит имя великого Архимеда.

Может быть, мы с вами и не узнали бы столько об Архимеде, если бы он не прославился при обороне своего родного города от римлян. Тогда Рим уже много лет воевал с Карфагеном, Сицилия долго была независима от них, но в 214 году до нашей эры Сиракузы решили принять сторону Карфагена. Римское войско осадило город. Во главе его стоял лучший полководец Марцелл. Он рассчитывал взять Сиракузы за неделю, но не мог ожидать, что участие одного человека может всё поменять. Просто этим человеком был великий Архимед. Для обороны своего города он создал небывалые военные машины: катапульты, метавшие камни на огромные расстояния; подъёмные краны с крючьями, которые цепляли римские корабли и топили их в гавани. Дошло до того, что солдаты Марцелла в ужасе разбегались, как только видели над крепостной стеной верёвку или бревно!

Существует даже легенда о том, что Архимед установил на крепостных стенах множество зеркал и с помощью силы солнца поджигал ими римские корабли. Многие потом сомневались, что это было возможно в принципе. Однако к тому времени греки уже знали об удивительном свойстве зеркального параболоида собирать солнечный свет в одной точке – фокусе. Чем больше и шире параболоид, тем дальше находится от него его фокус и тем сильнее нагревается эта точка. Похожий опыт каждый из вас может провести с увеличительным стеклом – с его помощью легко зажечь бумагу или палку. Где же Архимед мог взять такой огромный параболоид, чтобы поджигать им на расстоянии целые корабли? Первым на этот вопрос ответил в 1747 году французский учёный Жорж-Луи де Бюффон. Он взял 128 небольших плоских зеркал, расположил их по параболе и с их помощью



Параболоид собирает лучи солнца в одну точку – фокус

смог на расстоянии 50 метров не только зажечь дерево, но даже расплавить свинец и серебро. Тот же опыт повторили в 2005 году исследователи из Массачусетского технологического института – им удалось похожим способом поджечь корабль, стоящий в 50 метрах от берега.

Планетарий Архимеда

Впрочем, сочинение Архимеда, посвящённое зеркалам, его знаменитая «Катоптрика», считается полностью утраченным. Хотя можем ли мы быть уверены в этом до конца? Ведь другой его важный труд «Метод механических теорем» тоже считали навсегда потерянным. А потом его случайно обнаружили в середине XIX века в подвале библиотеки Константинополя на стёртом пергаменте, поверх которого были написаны богослужебные тексты. Этот палимпсест снова потерялся, был найден только через 100 лет и полностью прочитан уже в XXI веке.[2]

Осада Сиракуз продолжалась почти два года. Наконец римляне взяли город с помощью хитрости и предательства. Как обычно, на улицах начались резня и грабёж. Римский легионер ворвался к Архимеду с приказом немедленно следовать за ним к Марцеллу. Но Архимед так был поглощён решением геометрической задачи, что не слышал шума в городе и сказал ему только: «Не наступи на мои чертежи!» Это были его последние слова – раздражённый солдат убил его. Историк Плутарх пишет, что Марцелл, узнав о смерти Архимеда, сильно опечалился, разыскал родственников Архимеда и «милостиво обошёлся с ними». Впрочем, вряд ли это было действительно так. В ту эпоху весь греческий мир был свидетелем того, как жестоко римляне расправлялись с побеждёнными. Известно, что на память о великом учёном Марцелл взял себе его «небесную сферу» – чудесный маленький планетарий, сделанный руками Архимеда. На нём можно было наблюдать движение пяти планет, восходы солнца и фазы Луны. «Небесную сферу» Архимеда потом несколько веков всем показывали в Риме – она всегда вызывала восхищение!

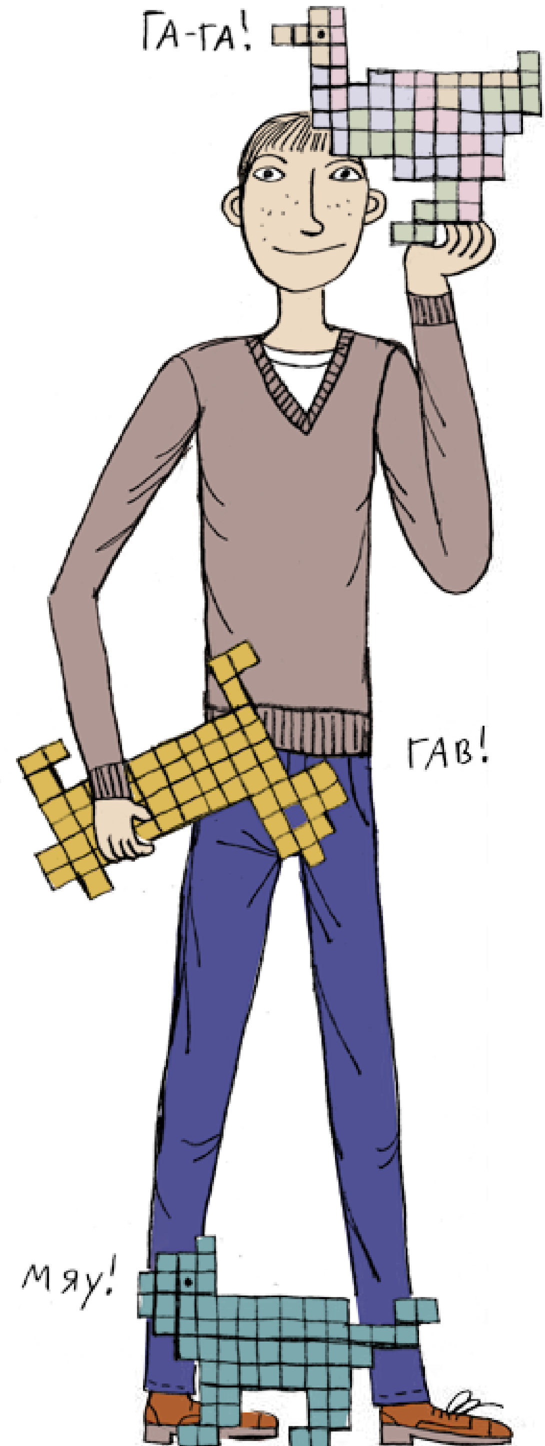
[2] Подробный рассказ об этом читайте в статье «Как железные чернила спасли рукопись Архимеда» в «Квантике» №8 за 2014 год.

Художник Алексей Вайнер

Юрий Маркелов

На сколько видов пентамино может делиться фигура?

Полимино – фигуры, образованные путём соединения нескольких клеток по их сторонам. Например, *тетрамино* – полимино из четырёх клеток, всего таких 5 штук (рис. 1). А полимино из пяти клеток называется *пентамино*, есть 12 различных фигур (рис. 2).



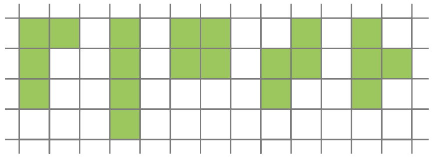


Рис. 1

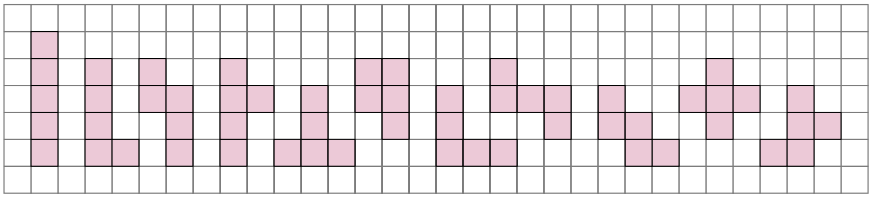


Рис. 2

На Математическом празднике 2018 года в 7 классе была моя задача:

Существует ли такая фигура, что при любом выборе вида тетрамино эту фигуру можно составить, используя тетраминошки только выбранного вида? (Переворачивать тетраминошки можно.)

Ответ тут положительный (рис. 3).

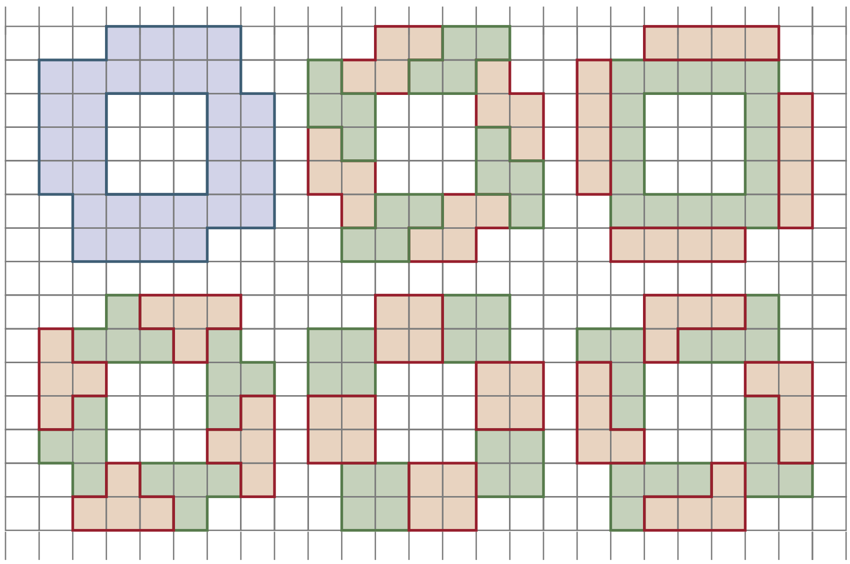
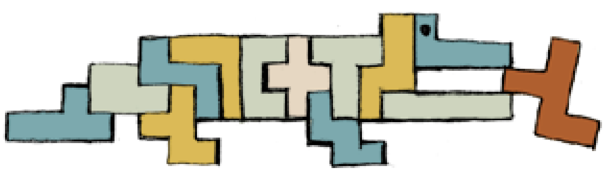
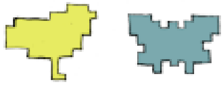


Рис. 3





Зададим тот же вопрос про пентамино. Оказывается, здесь ситуация другая: нет такой фигуры, что при любом выборе вида пентамино эту фигуру можно составить, используя пентаминошки только выбранного вида. Почему?

Докажем, что нет даже такой конечной фигуры, которая «делится» только на кресты (рис. 4) и только на арки (рис. 5). Пусть какую-то фигуру можно разделить на кресты. Рассмотрим множество самых правых её клеток, из них возьмём самую верхнюю (клетка 1 рисунка 6). В силу выбора клетки 1, фигуре не принадлежат клетки выше клетки 1 в том же столбце и все клетки правее клетки 1 (серая зона на рисунке 6). Тогда крест, накрывающий клетку 1, может стоять только как на рисунке 6. А клетки 2 и 3 не могут принадлежать фигуре, так как любой крест, содержащий одну из этих клеток и не пересекающийся с первым крестом, захватит клетку из серой зоны. Но тогда внутри фигуры не удастся расположить арку, покрывающую клетку 1.

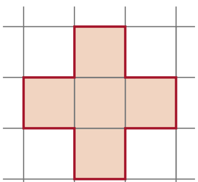


Рис. 4

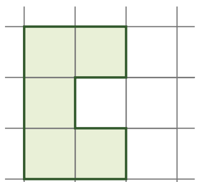


Рис. 5

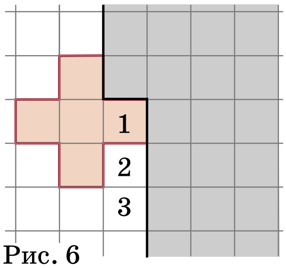


Рис. 6

Интересно, для какого наибольшего числа видов пентамино всё же существует фигура, «делящаяся» на каждый из них? На рисунке 7 приведён пример фигуры для 4 видов.

Точный ответ на этот вопрос нам неизвестен. Попробуйте поэкспериментировать и найти фигуру, «делящуюся» на как можно большее число видов пентамино. В следующем номере мы приведём лучший известный нам результат. Если у вас получится пример, в котором больше видов, обязательно пришлите его нам для публикации. Удачи!

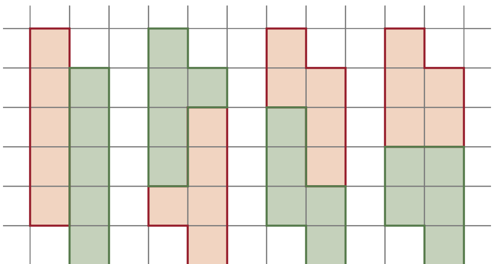
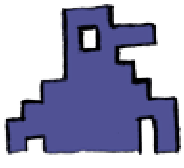
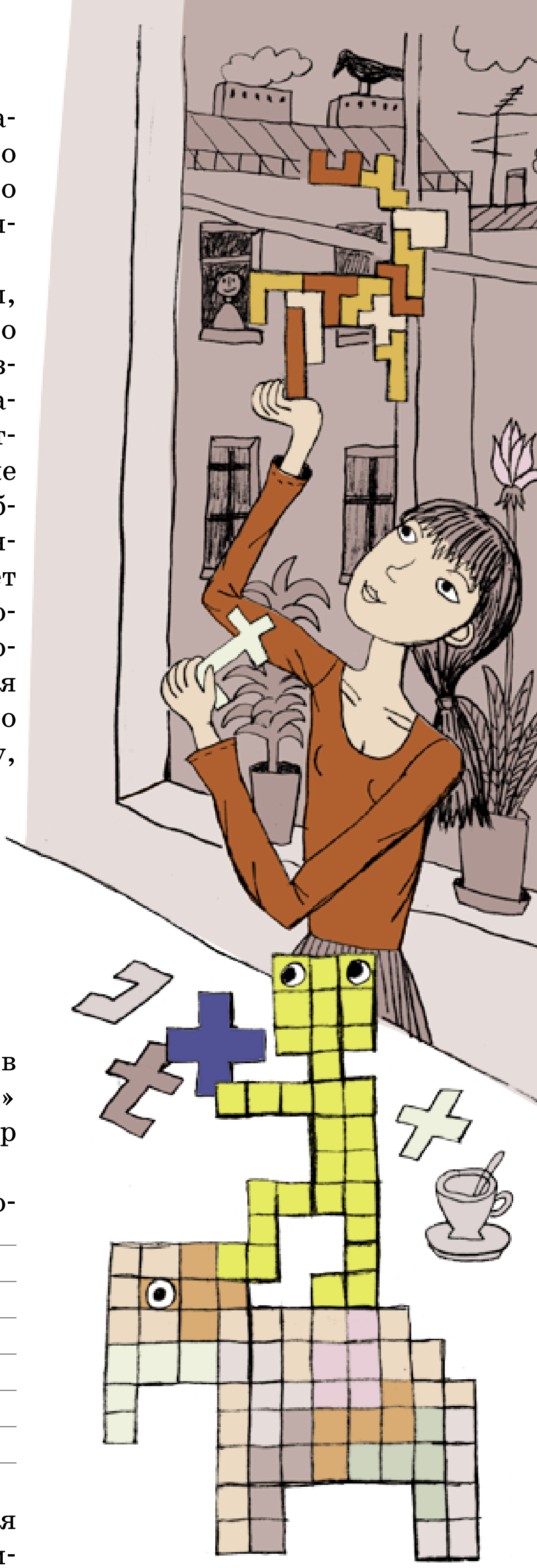


Рис. 7





Художник Артём Костюкевич

Материал подготовлен редакцией журнала

ПОЧЕМУ ЖЕ КРАЯ ЦВЕТНЫЕ?

В прошлом номере читателям была предложена задача:

Некоторые компьютеры могут вести себя необычно: если на них увеличить чёрно-белый текст (например, со снимка веб-страницы) в редакторе изображений, то края букв будут цветными, а не чёрно-белыми – вопреки ожиданиям. Объясните причины такого странного явления.

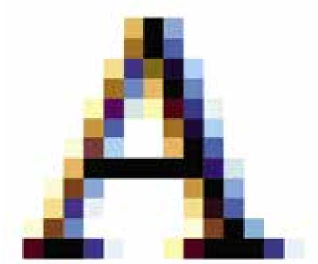


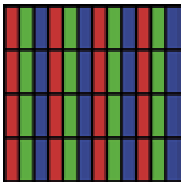
Рис. 1. Края увеличенной буквы цветные

Чтобы разобраться, напомним, как устроен экран большинства жидкокристаллических мониторов. Экран сложен из маленьких квадратиков – пикселей. Их обычно около миллиона. Каждый пиксель состоит из трёх вертикальных полосок – красной, зелёной и синей: . Цвета выбраны так потому, что в нашем глазу есть как раз три типа колбочек: одни лучше реагируют на синий цвет, другие – на зелёный, третьи – на красный.

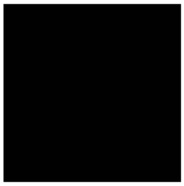
Пиксель очень маленький, и наш глаз не видит полоски по отдельности. При восприятии они смешиваются, и получившийся цвет зависит от яркости каждой полоски.[1] Например, если все три полоски пикселя горят максимально ярко, мы увидим пиксель белым: .

На рисунке 2 показано, как устроена одна и та же область размером 4 × 4 пикселя, когда мы видим её белой, чёрной, синей и жёлтой соответственно.

[1] Смешивая именно красный, зелёный и синий цвета, можно добиться наиболее широкого спектра цветов, которые мы можем воспринять. Подробнее об этом читайте в статье А. Бердникова «Цветные тени» в «Квантике» № 7 за 2015 год.

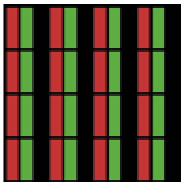


Все полоски горят максимально ярко (видим белый квадрат)



Все полоски погашены (видим чёрный квадрат)

Синие полоски максимально яркие, остальные погашены (видим синий квадрат)



Синие полоски погашены, остальные максимально яркие (видим жёлтый квадрат)

Рис. 2.

Как изображается чёрная буква А на экране? Если нарисовать её чёрными пикселями, контуры буквы получатся слишком угловатыми (рис. 3).

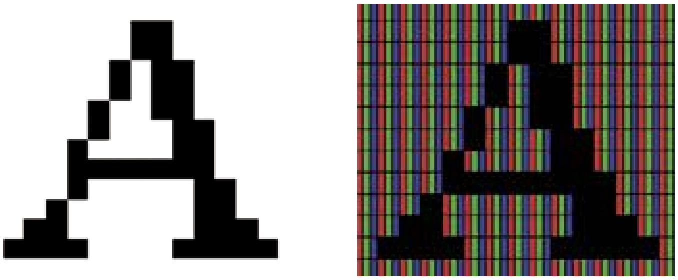


Рис. 3. Буква А из целых чёрных пикселей: в редакторе и на экране

Можно использовать оттенки серого, делая некоторые пиксели не совсем чёрными, а чуть светлее. Контуры получатся более гладкими, но буква станет размытой (рис. 4).

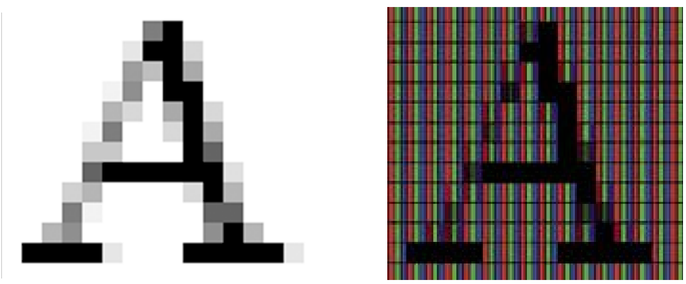
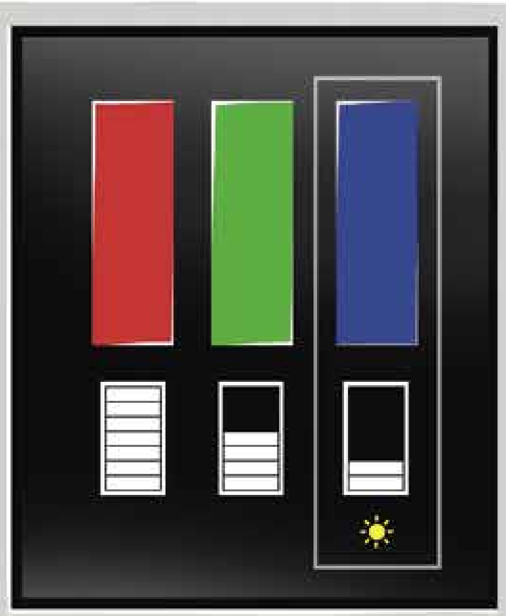


Рис. 4. Буква А с оттенками серого: в редакторе и на экране

Но ведь можно пойти по другому пути – вспомнить, что каждый пиксель состоит из трёх полосок, и



менять яркость каждой полоски по отдельности. Результат вы видите на рисунке 5 (контуры буквы выглядят более ровными, чем на рисунке 3).

Хотя некоторые пиксели погашены лишь частично, в любом месте экрана мы видим либо чёрный цвет, либо все три цвета рядом, поэтому буква А получается чёрной, а фон – белым.

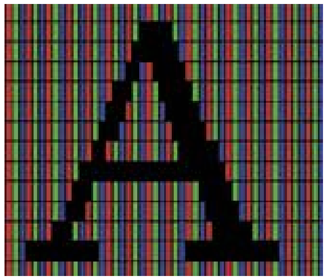


Рис. 5. Буква А на экране, у некоторых пикселей погашены не все полоски

Если же при этом ещё и плавно менять яркость полосок (как в случае с оттенками серого), можно сделать букву ещё глаже – как на рисунке 6. (Кстати, примерно так и совершенствовались буквы при создании шрифтов.)

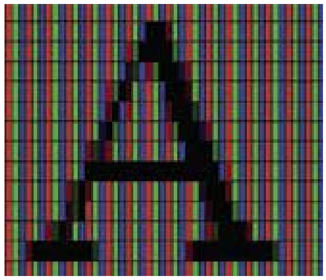


Рис. 6. Добавляем плавное изменение яркости у полосок

Но что произойдёт, если мы увеличим букву А, устроенную как на рисунке 6? После увеличения каждый пиксель превратится в квадрат того же цвета, но большего размера, и его цвет станет различим глазом. Например, если в каком-то пикселе горела только синяя полоска, после увеличения он превратится в синий квадрат, как в примере на рисунке 2. Такие «неполные» пиксели расположены как раз по краям буквы. В итоге мы получим букву А рисунка 1 с цветными краями. Вот и весь секрет.

В дополнение заметим ещё, что в разных электронных системах пиксели могут по-разному делиться на полоски: например, цвета могут идти в другом порядке. А если повернуть экран на 90°, как мы часто делаем с планшетом или телефоном, пиксель уже будет разделён на горизонтальные полоски. Бывает и более сложное деление пикселя, как на рисунке 7. Всё это нужно учитывать при сглаживании шрифтов.

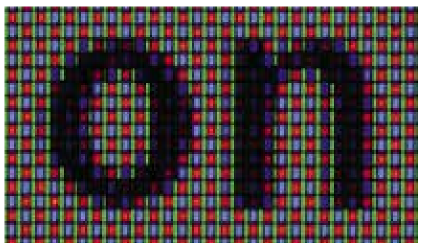


Рис. 7.

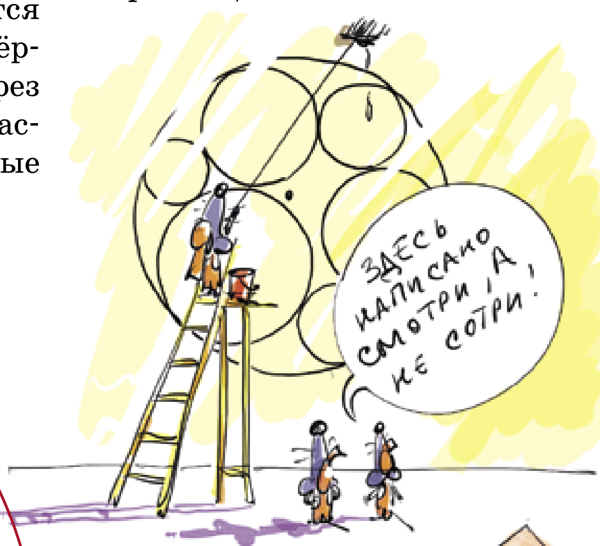
Художник Мария Усеинова

ТЕОРЕМА О СЕМИ ОКРУЖНОСТЯХ

СМОТРИ!

По материалам журнала «Математическое просвещение»

На рисунке 1 вы видите цепочку из шести чёрных окружностей: каждые две соседние окружности в цепочке касаются друг друга, и все шесть касаются большой красной окружности. Для каждой пары чёрных окружностей, расположенных в цепочке через две, соединим между собой точки их касания с красной окружностью. Оказывается, что три построенные прямые пересекаются в одной точке.



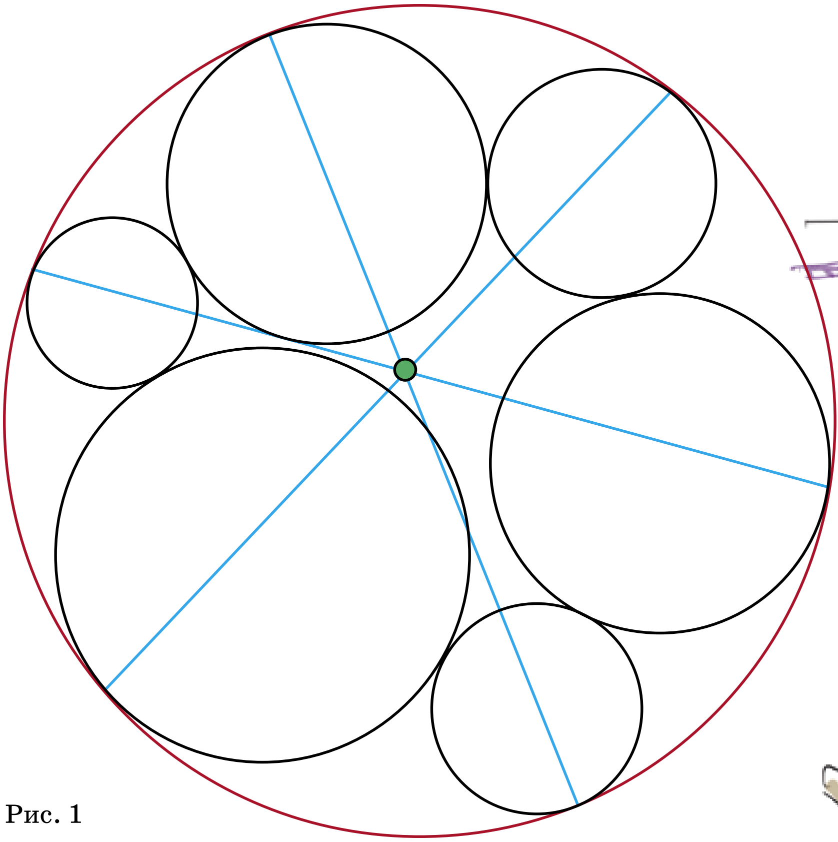
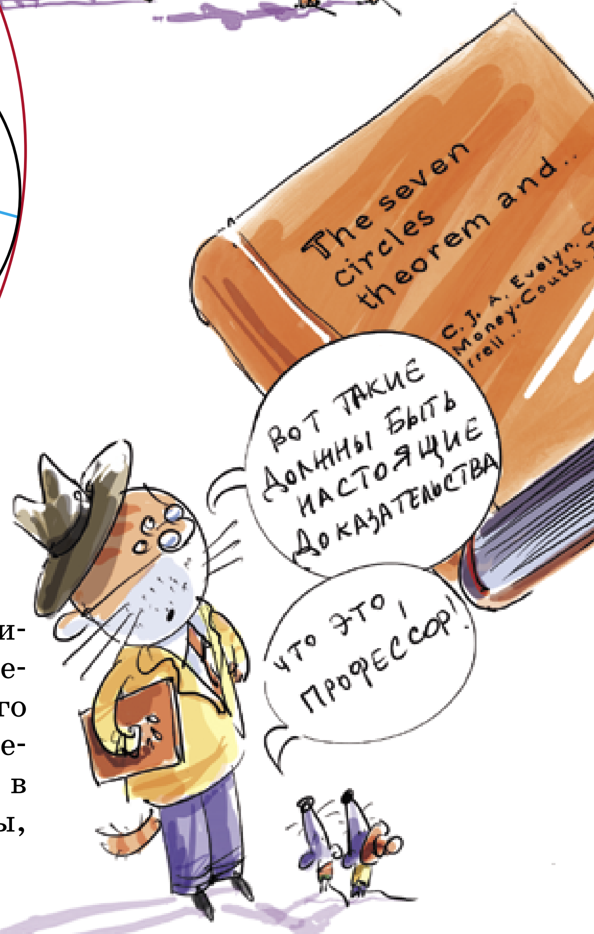
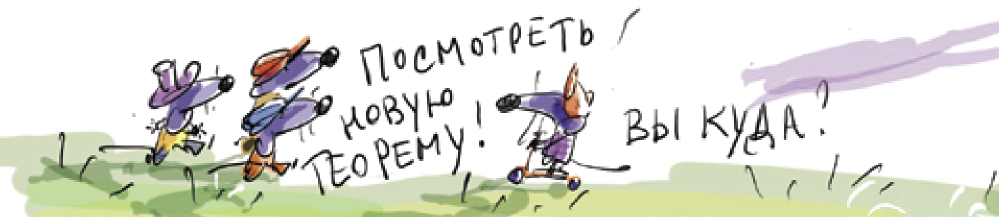


Рис. 1



Авторы теоремы – С. Дж. А. Ивлин, Г. Б. Мани-Кутс, Дж. А. Тиррелл. Доказательство теоремы непростое. Желающие могут попробовать найти его самостоятельно или прочитать в 23 выпуске «Математического просвещения» (с. 51–58), вышедшем в 2018 году. А можно просто оценить красоту теоремы, разглядывая этот и следующие рисунки.



СМОТРИ!

Теорема верна и для такого расположения окружностей, как на рисунке 2.

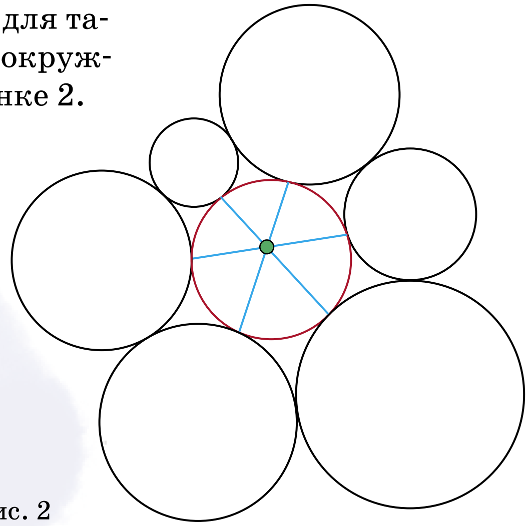


Рис. 2

Также она верна для некоторых хитрых расположений (но не для всех!), когда какие-то из чёрных окружностей содержат другие внутри себя (касаются внутренним образом) – например, как на рисунках 3 и 4.

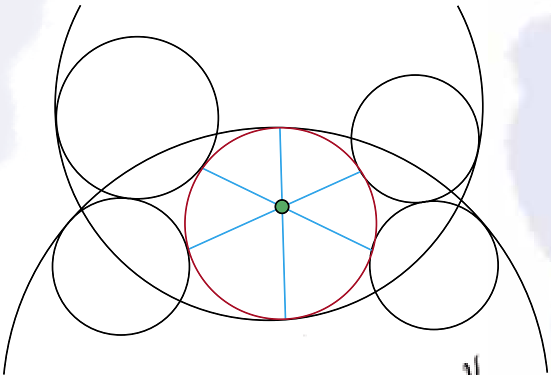


Рис. 3

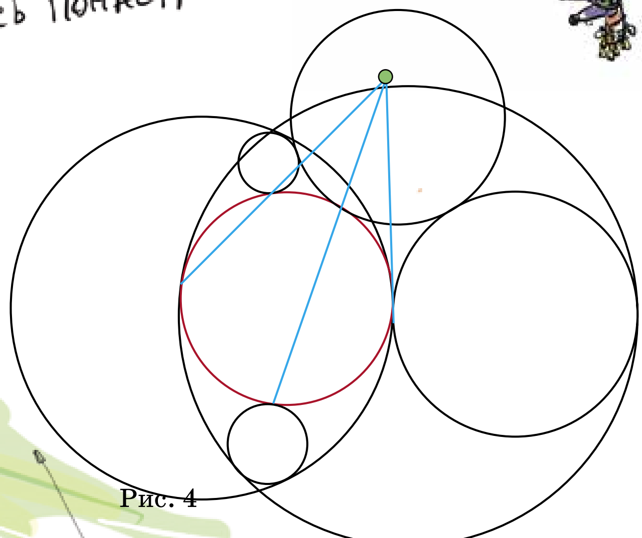
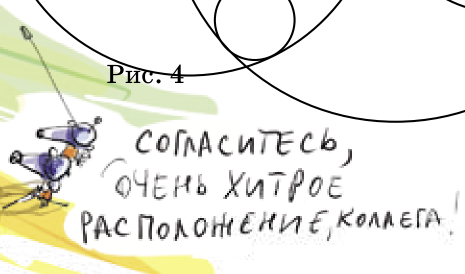


Рис. 4



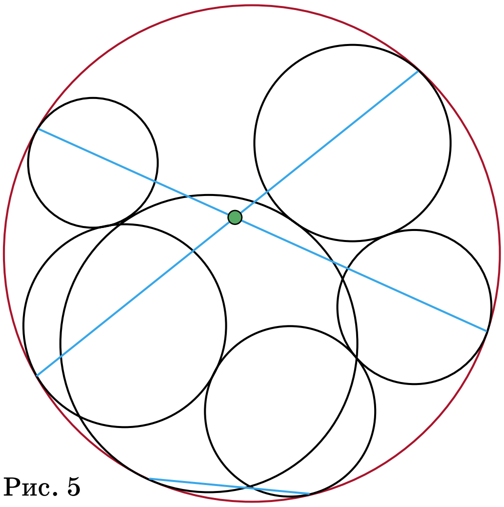


Рис. 5

А рисунок 5 – пример расположения, когда теорема неверна.

А ещё теорема остаётся верной при замене некоторых окружностей на прямые – например, как на рисунках 6–8.

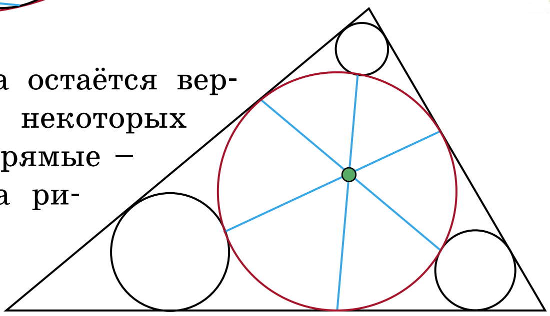


Рис. 6

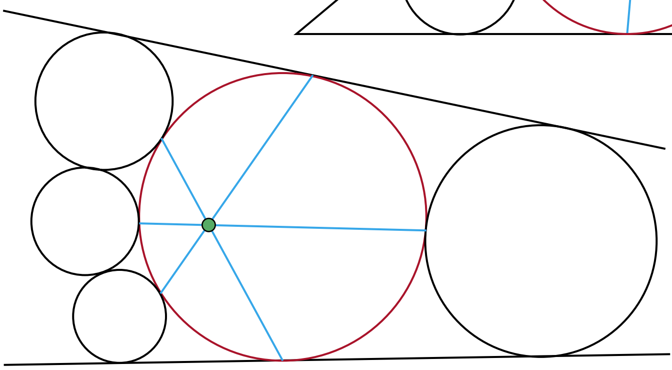


Рис. 7

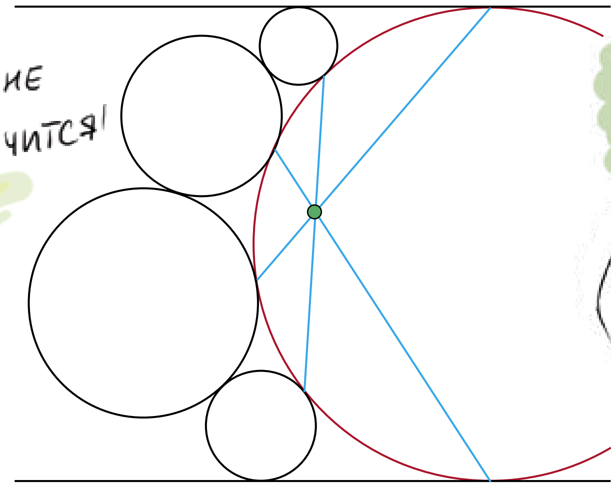


Рис. 8

Художник Сергей Чуб

Материал подготовил
Михаил Евдокимов

ЗАМКИ

1. Барон Мюнхгаузен утверждает, что, проснувшись утром, он обошёл все залы своего замка, побывав в каждом ровно один раз. Схема залов замка (вид сверху) представлена на рисунке над условием задачи (все залы одинаковые квадратные; между любыми двумя соседними залами есть дверь, ведущая из одного в другой). Могут ли слова барона быть правдой?

2. Залы замка имеют одинаковые размеры 10×20 метров. Известно, что из любого зала в любой другой можно пройти, оставаясь на том же этаже и посетив ещё не более чем один зал. Может ли на одном этаже быть ровно 9 залов?

Авторы: М. Евдокимов (2),
фольклор (1, 3, 4)

3. Почему винтовые лестницы в старых замках закручивались так, что лестница при подъёме поворачивала вправо, а не влево?

4. Замок имеет форму кольца и состоит из абсолютно одинаковых комнат, у каждой ровно две соседние комнаты (как на рисунке ниже). В каждой комнате есть лампа, которую узник может включать и выключать (некоторые лампы уже горят). Запрещается производить какие-либо другие действия (оставлять предметы в комнате, пачкать стены, и т.д., за этим тщательно следит охранник). Узнику обещана свобода, если он правильно определит количество комнат в замке. Может ли узник это сделать?

Художник Анна Горлач

Александр Пиперски

Из мухи – СЛОНА

Окончание. Начало в № 2

Представьте себе, что мы играем однобуквенными словами. В «Грамматическом словаре» ровно 9 однобуквенных существительных: А, Е, И, О, У, Ы, Э, Ю, Я – названия гласных букв (слово Ё мы объединили со словом Е). Из любого слова к любому можно перейти за один ход, и это неинтересно. Если, напротив, играть в 10-буквенные слова, то от большинства слов – как, скажем, от слова БЕЗДЕЛЬНИК, – вообще нельзя никуда перейти. Получается, что игра интересна, когда выполнены два требования: пути между словами длинные и между двумя произвольно взятыми словами путь обычно существует (но не всегда – если успех гарантирован, играть тоже скучно).

Чтобы оценить среднюю длину пути, надо найти самые короткие пути между всеми парами точек, для которых путь есть, и вычислить среднее. Это трудоёмкий процесс, но есть алгоритмы, которые производят такое вычисление достаточно быстро. А сделав его, узнать вероятность успеха совсем просто: у нас есть 1712 4-буквенных слов, а значит, $1712 \cdot 1711$ упорядоченных пар (от любого из 1712 слов мы пытаемся пройти к любому из 1711 оставшихся); посчитаем, сколько из них соединены путём, и разделим на $1712 \cdot 1711$. Таких пар 1851342, а значит, вероятность успеха равна $1851342/(1712 \cdot 1711) \approx 0{,}632$.

Можно сделать то же самое по-другому, опираясь на знания про размеры компонент связности. Возьмём произвольное начало цепочки; вероятность того, что оно попадёт в большую компоненту связности, составляет 1361/1712; возьмём теперь другое произвольное слово в качестве конца цепочки: в большой компоненте осталось 1360 слов, а всего в словаре – 1711, то есть вероятность того, что оно окажется связанным с началом, составляет 1360/1711. Тогда начало и конец цепочки попадут в большую компоненту с вероятностью $1361 \cdot 1360/(1712 \cdot 1711)$. Во вторую по величине компоненту связности они попадут с вероятностью $11 \cdot 10/(1712 \cdot 1711)$. Суммируя эти вероятности для всех компонент, получим то же число 0,632. Результаты подсчётов для слов от 1 до 12 букв – в таблице:

Длина слова	Количество слов	Средняя длина пути	Вероятность успеха
1	9	1	1
2	70	3,6	1
3	490	4,4	0,866
4	1712	8,8	0,632
5	3642	8,6	0,076
6	5120	7,9	0,004
7	6584	8,9	0,002
8	6929	3,3	0,0001
9	6349	2,2	0,00008
10	5098	1,3	0,00003
11	3808	1,5	0,00004
12	2747	1,2	0,00002

Видно, что 4-буквенные слова действительно обеспечивают хорошую, но всё же не стопроцентную вероятность успеха и при этом создают достаточно длинные цепочки. А с 10-буквенными словами всё скучно: даже в тех редких случаях, когда путь есть, он обычно состоит из одного шага (ВОЗМЕЩЕНИЕ → → ВОЗМУЩЕНИЕ), редко – из двух или больше. Единственный путь из пяти шагов соединяет слова ПАССИРОВКА и ФАРШИРОВКА: ПАССИРОВКА → → МАССИРОВКА → МАСКИРОВКА → МАРКИРОВКА → МАРШИРОВКА → ФАРШИРОВКА.

Эта цепочка напоминает ещё об одной проблеме, с которой надо разобраться: редкие слова. Попробуйте решить такую задачу: ДАЛЬ → ПАРИ. В этих словах совпадает буква А на втором месте, и есть надежда справиться за три шага. Действительно, такой путь есть: ДАЛЬ → ПАЛЬ → ПАЛИ → ПАРИ. Но едва ли он вас порадует: большинство людей не знают ни слова ПАЛЬ (выжженный участок в лесу или в степи), ни слова ПАЛИ (один из древних индийских языков). Но существует и путь из более нормальных слов: ДАЛЬ → → ДАНЬ → ДЕНЬ → ТЕНЬ → ТЕНТ → ТЕСТ → ТОСТ → → ПОСТ → ПОРТ → ПОРА → ПАРА → ПАРИ. Он длиннее, но в каком-то смысле лучше пути из трёх шагов. Попробуем формализовать эту идею.

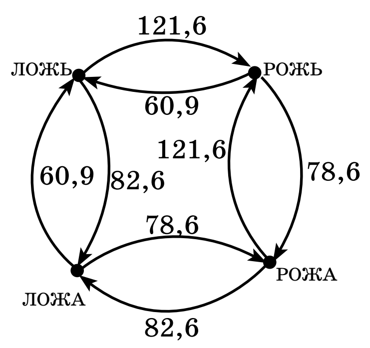
Для этого нам понадобится ещё один словарь – частотный (я пользуюсь «Новым частотным слова-

рём русской лексики» О. Ляшевской и С. Шарова). В частотном словаре слова упорядочены по тому, насколько они употребительны в языке: 1-е место занимает союз И, на 2-м месте – предлог В, на 3-м – частица НЕ и т. д. А вот 10 самых частых 4-буквенных существительных с указанием их мест: 65) ДЕЛО, 71) ДЕНЬ, 74) РУКА, 104) ЛИЦО, 106) ДРУГ, 110) ГЛАЗ, 140) СИЛА, 191) ВОДА, 192) ОТЕЦ, 205) НОГА.

Слова типа ДЖИП и ТИТР стоят гораздо ниже: 6616) ДЖИП, 8086) ТИТР. Всего в этом словаре 52 138 слов, из них с «Грамматическим словарём» пересеклось 1140 4-буквенных существительных. А, например, слово ЛИВР (старая французская монета) даже не попало в частотный словарь. Условно присвоим ему и всем другим таким словам номер 100 000.

А теперь сделаем наш граф ориентированным и взвешенным. *Ориентированный* – это значит, что из вершины в вершину будут вести не отрезки, а стрелки, точнее пары стрелок: одна в одну сторону, другая в другую. А *взвешенный* значит, что каждой стрелке будет приписан вес: по одним стрелкам ходить будет дороже, а по другим дешевле. Веса припишем так: если стрелка ведёт в слово, которое занимает k-е место в частотном словаре, припишем ей вес $\sqrt{k}$ (мы могли бы выбрать и какую-нибудь другую функцию, но квадратный корень даёт результаты, которые кажутся подходящими для наших нужд). Например, все стрелки, ведущие в ДЕЛО, получают вес $\sqrt{65} \approx 8{,}1$, все стрелки, ведущие в ТИТР, – $\sqrt{8086} \approx$ $\approx 89{,}9$, а все стрелки, ведущие в ЛИВР, – $\sqrt{100000} \approx$ $\approx 316{,}2$. Длиной пути теперь будет не количество рёбер, а сумма чисел на стрелках, по которым мы двигались. Проходить редкие слова теперь невыгодно: ведущие в них стрелки весят слишком много.

Попробуем для примера найти оптимальный путь от слова ЛОЖЬ к слову РОЖА. Возьмём подграф, содержащий слова ЛОЖЬ, РОЖЬ, ЛОЖА и РОЖА, и разметим в нём веса.



Окажется, что путь ЛОЖЬ → РОЖЬ → РОЖА стоит $121{,}6 + 78{,}6 = 200{,}2$, а путь ЛОЖЬ → ЛОЖА → → РОЖА стоит $82{,}6 + 78{,}6 = 161{,}2$. Иначе говоря, выгоднее идти через более частое слово ЛОЖА, чем через более редкое РОЖЬ.

Но вернёмся к путям от ДАЛЬ к ПАРИ. Оказывается, более длинный по числу шагов путь выгоднее с точки зрения весов: ДАЛЬ $\xrightarrow{96,5}$ ДАНЬ $\xrightarrow{8,4}$ ДЕНЬ $\xrightarrow{36,4}$ ТЕНЬ $\xrightarrow{140,9}$ ТЕНТ $\xrightarrow{65,8}$ ТЕСТ $\xrightarrow{81,6}$ ТОСТ $\xrightarrow{38,8}$ ПОСТ $\xrightarrow{58,4}$ ПОРТ $\xrightarrow{16,6}$ ПОРА $\xrightarrow{27,9}$ ПАРА $\xrightarrow{126,2}$ ПАРИ (сумма 697,5); ДАЛЬ $\xrightarrow{316,2}$ ПАЛЬ $\xrightarrow{316,2}$ ПАЛИ $\xrightarrow{126,2}$ ПАРИ (сумма 758,6).

Так мы формализовали ощущение, почему длинная цепочка с известными словами лучше, чем короткая с неизвестными. Кстати, для задачи МУХА → → СЛОН цепочки без весов и с весами тоже разные. Без весов (10 шагов): МУХА → МУРА → МАРА → ПАРА → → ПАРК → ПАЕК → САЕК → СТЕК → СТЕН → СТОН → → СЛОН; с весами (13 шагов): МУХА → МУКА → → ЛУКА → ЛУПА → ЛАПА → ПАПА → ПАРА → ПАРК → → ПАЕК → САЕК → СТЕК → СТОК → СТОН → СЛОН.

Увы, и в цепочке с весами не удалось обойтись без малоизвестного слова САЕК (точнее, САЁК), которое значит «молодой олень». Но другие решения этой задачи включают в себя ещё и не такое. Самую короткую из известных цепочек придумал Владимир Гончаров; в ней 7 шагов: МУХА → МУЛА → КУЛА → → КИЛА → КИЛН → КИОН → СИОН → СЛОН. По нашим правилам она не подходит, потому что в «Грамматическом словаре» из 6 промежуточных слов есть только КИЛА (это разговорное название для грыжи), а если бы они и были, то с весами эта цепочка стоила бы очень дорого, ведь все промежуточные слова в ней редкие – да и разве интересна цепочка, в которой 6 из 6 промежуточных слов нам неизвестны?

Всё сказанное выше, с одной стороны, звучит неутешительно: игру «из мухи – слона» постигла судьба шахмат и шашек – компьютер играет в неё гораздо лучше человека. С другой стороны, не всё так плохо: компьютерный анализ позволил нам узнать много интересного и про саму игру, и про русский язык.

Художник Мария Усеинова

Тим Собакин

МЫШЬ ЧЕТЫРЁХМЕРНАЯ

Однажды я пошёл в магазин. А там сыр продают. «Надо же, – подумал я, – сыр! Куплю, пожалуй, граммов двести». Купил. Дома положил в холодильник. Съем, думаю, на ужин. Но вечером обнаружил, что сыра нет. Куда бы ему деться? Взять никто не мог – я ведь один живу.

Вдруг вижу: сидит в углу мышь и сыр мой аппетитно уплетает. Как же она его из холодильника утащила? Дверца-то очень плотно закрывается.

Взял я тогда мышь и вместе с сыром посадил в холодильник. Пусть подумает там о своём нехорошем поведении. Пусть помёрзнет немного!

Сел было газету читать, а мышь – тут как тут. И лапкой мордочку утирает. «Дырка у меня, что ли, в холодильнике», – подумал я. Осмотрел его внимательно снаружи и изнутри, но дырки не обнаружил. Ради любопытства ещё раз посадил в холодильник мышь. А она опять через минуту по комнате разгуливает.

Тут уж я не на шутку удивился.

– Ты это чего?

– Ничего, – отвечает мышь. – Гуляю вот. Сыр очень вкусный попался.

– Это ладно, – говорю. – Как ты из холодильника вылезаешь? Ход у тебя, что ли, потайной имеется?

– Зачем потайной? – удивляется мышь. – Я так прохожу. По-простому.

– Ну-ка, продемонстрируй.

– Пожалуйста!

И мышь подошла к дверце холодильника. И в тот же миг исчезла! Будто и не было её вовсе... Я открыл дверцу. Мышь сидела в холодильнике, дожёвывая остатки сыра.

– Ловко! – одобрил я. – Долго тренировалась?

– Я сроду так умела, – обиделась мышь.

Этот рассказ перепечатывается из замечательного детского журнала «Трамвай», выходившего в 1990 – 1995 годах (см. № 11 за 1990 год). Придумал журнал и был его главным редактором детский писатель и поэт Тим Собакин. Все номера «Трамвая» выложены на сайте tramwaj.narod.ru/

– Вундеркинд, то есть вундермышь, значит?

– Да нет. Просто я четырёхмерная.

– Какая, какая?

– Че-ты-рёх-мер-ная!

– А это как? – не понял я.

– Очень просто, – объяснила мышь. – Ну вот скажи, каких размеров у тебя холодильник?

– Я не помню точно... Кажется, метр двадцать по высоте, а в длину и ширину – примерно полметра.

– Стало быть, длина, ширина и высота. Всего три измерения, – подытожила мышь. – А каков же размер холодильника в четвёртом измерении?

– В четвёртом? – удивился я. – Да нет вообще такого измерения! Только длина, ширина и высота. Куда же ещё измерять-то?

– Ты, Савелий, существо трёхмерное. И живёшь в трёхмерном мире. Вот тебе и кажется, что четвёртого измерения нет. А я, между прочим, в холодильник твой аккурат через четвёртое измерение проникаю.

Я почесал за ухом, потому что ничего не понял.

– Нельзя ли растолковать поподробнее?

– Хорошо, я попробую, – согласилась мышь. – Представь себе какое-нибудь существо, которому известно только ДВА измерения – длина и ширина. И живёт оно в двумерном мире, другими словами, на плоской поверхности. Что такое «высота», там никто не знает, потому что все измерения проводятся или по горизонтали, или по вертикали. Так вот, у этого двумерного существа есть двумерная квартира. Её план также удобно изображается на плоскости. – Мышь взяла бумагу, карандаш и принялась рисовать. – А теперь ответь мне, если это существо лежит на кровати, то что оно может видеть?

Я внимательно поглядел на рисунок.

– Телевизор может видеть. Тоже двумерный. Ну там стол, сервант. Наблюдать в окне двумерный вид снаружи.

– А если дверь на кухню приоткрыта?

– Тогда холодильник можно увидеть. И всё, пожалуй.

– Правильно! – похвалила мышь. – Потому что стены квартиры мешают увидеть всё остальное. И если к этому существу придёт в гости другое двумерное существо, то оно должно, миновав прихожую, войти в комнату. Только тут они могут увидеться друг с другом. А что творится в это время, скажем, в ванной, они оба наблюдать уже не в состоянии, поскольку видеть через стены не умеют. А проходить сквозь них – тем более!

– Занятно, – согласился я. – А дальше?

– А теперь представь себе, что ты – трёхмерное существо – оказываешься в этом плоском двумерном мире. У тебя есть там великое преимущество – третье измерение, то есть та самая «высота», о которой не имеют ни малейшего понятия двумерные обитатели. И благодаря этому ты созерцаешь двумерный мир как бы сверху, с «высоты» своего третьего измерения. Ты запросто можешь проникать в жилище двумерных существ, как бы «перешагивая» через стены, а уж видеть, что за ними происходит, – и подавно!

– Получается, что в двумерном мире для меня не существует никаких преград и барьеров?

– Вот именно! А главное, – тут мышь облизнулась, – тебе вовсе не нужно открывать дверцу холодильника, чтобы увидеть внутри сыр и без труда достать его оттуда.

– Кажется, начинаю догадываться. Вот ты какая, мышь четырёхмерная! – обрадовался я. – Наш трёхмерный мир ты созерцаешь как бы с «высоты» своего четвёртого измерения, которое мы даже и вообразить-то себе не можем. И поэтому ты запросто проникаешь в мой закрытый холодильник, как бы перешагивая через его дверцу... Однако это ещё не повод, чтобы красть чужой сыр.

– А ты догадлив, Савелий! – воскликнула мышь. – Действительно, для меня не существует препятствий в трёхмерном мире. Потому что он представляется мне таким же «плоским», как тебе – двумерный мир. Короче говоря, я вижу тут всё буквально насквозь. И тебя, между прочим, тоже. Вижу,

как бьётся твоё сердце, как течёт по венам кровь, и что в желудке у тебя совсем пусто.

– Неужели? – содрогнулся я.

– Но ведь ты тоже видишь насквозь двумерных существ. А вот они увидеть тебя никак не могут. По крайней мере таким, каков ты есть на самом деле.

– Это почему же?

– Потому что двумерные существа могут наблюдать лишь твою проекцию на плоскость. Если ты пройдёшься по их квартире, они обнаружат двумерные следы твоих ног – и только. «Высоты» же твоей, простирающейся в третье измерение, им ни за что не постигнуть, ибо третье измерение для них абсолютно неведомо.

– Постой, постой! – вдруг осенило меня. – Но ведь выходит, что и тебя я воспринимаю как трёхмерную проекцию.

– Совершенно верно, – кивнула мышь. – Ты наблюдаешь только мой «след» в своём трёхмерном пространстве. Вообразить же меня в четвёртом измерении тебе не под силу.

– Жаль, – вздохнул я. – Интересно всё-таки, как ты выглядишь во всех своих четырёх измерениях.

– Я не могла бы тебе этого объяснить. А ты бы даже не смог себе этого представить. Как ни старался бы...

– Но почему, почему наше пространство трёхмерно? Отчего оно имеет только три измерения – не больше и не меньше?

– Сие науке пока неизвестно, – глубокомысленно изрекла мышь. – Однако что-то проголодалась я. А в холодильнике у тебя, как вижу, пусто. Отправлюсь-ка в магазин поживиться чем-нибудь.

Но я возразил:

– Уж полночь близится! Все магазины давно закрыты.

– Для кого закрыты, – лукаво усмехнулась мышь, – а для кого нет никаких препятствий. Прощай, Савелий, существо ты моё трёхмерное!

Мышь подошла к стене и бесшумно как бы «втекла» в неё. Будто бы и не было её вовсе. Ни стены. Ни самой мыши.

Художник Анна Горлач

Игорь Акулич

ОГОРОДНОЕ ЗАНЯТИЕ

– А нынешнему занятию кружка самое подходящее название – «огородное». Нет, вилы и лопаты я не принёс, обойдёмся без них. А начать позвольте с воспоминаний. Я ведь тоже когда-то учился в школе и кроме математики увлекался тогда и физикой. Однажды на физической олимпиаде попалась мне такая задача:

Барон Мюнхгаузен рассказывал, что однажды, разбежавшись, пытался перепрыгнуть широкий ров. Но уже оторвавшись от земли, он понял, что набранная им скорость недостаточна, и до противоположного края долететь не удастся. Тогда барон развернулся в полёте и вернулся на исходный берег. Почему это невозможно?

По причине некоторой нервозности я неверно прочёл вопрос и воспринял его так: «Почему это возможно?». И знаете – за отведённое время мне почти удалось это доказать![1] И лишь в самом конце я заметил, что ошибся при чтении. Это так меня расстроило, что олимпиаду я провалил. С тех пор в физике разочаровался и полностью сосредоточился на математике.

– А при чём здесь огород?

– При том, что как-то попалась мне на глаза вот такая задача Михаила Евдокимова[2]:

У Умного Кролика есть участок квадратной формы 8×8, состоящий из 64 одинаковых грядок 1×1. На некоторых грядках он выращивает капусту, а на остальных морковь (пустых грядок нет). Известно, что рядом с каждой капустной грядкой ровно две капустные, а рядом с каждой морковной ровно две морковные (грядки находятся рядом, если они соседние по стороне). Может ли доля капустных грядок составлять

а) ровно половину;

б) более 60 % от общего числа грядок?

Давайте с неё и начнём. Какие есть соображения?

– С половиной ясно – разбиваем на квадраты 2×2!

– Это как?

[1] Между прочим, реальный случай, произошедший с одним из знакомых автора (ныне академиком).

[2] См. «Квантики» № 9 (условие) и № 11 (решение) за 2017 год.

– А вот так (рис. 1)! Тёмные – капустные грядки, белые – морковные.

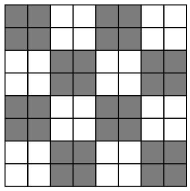


Рис. 1

– Да, верно. Такое решение само просится. А как насчёт 60 процентов?

– Наверно, невозможно... Для капусты – два соседа, и для морковки – два соседа. Так что, скорее всего, может быть только поровну.

– Не спешите с выводами. Подумайте: если каждая капустная грядка соседствует с двумя капустными, то, соединив все такие соседние грядки между собой условными линиями, получим что-то вроде *кольца*. На приведённом примере все эти кольца содержат по четыре грядки, но ведь может быть иначе...

– А, ясно! Вложенные кольца!

– Намёк понятен. Покажите всем свою идею.

– Вот она (рис. 2)! Капустных грядок здесь... сейчас посчитаю... ровно 40, и это составляет $40/64 = 0{,}625$, то есть больше 60 процентов!

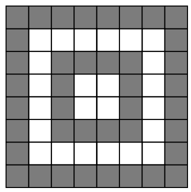


Рис. 2

– Молодец! Теперь задача решена полностью. Но не будем с ней расставаться. Дело в том, что когда я читал её условие, возникла почти ситуация «дежа вю». А именно: я почему-то воспринял дело так, что с каждой капустной грядкой должны соседствовать две *морковные*, а с каждой морковной – две *капустные*. И потому ответ меня несказанно возмутил. Посмотрите, скажем, на угловые грядки обоих рисунков! Сначала подумал – вопиющая опечатка, и лишь затем сообразил, что смотрел в книгу, а видел фигу...

– Не в книгу, а в журнал.

– Непринципиально. Но нет худа без добра. По сути, эта ошибка породила новую задачу, в которой грядки соседствуют по-иному. А давайте-ка её решим! Вопросы те же – про половину и про 60 %. Думайте!

(*Долгая пауза*)

– Что, не очень-то выходит?

– Не очень... А вообще такое расположение грядок возможно?

– Возможно! Даю подсказку: к нему приведёт небольшая трансформация рисунка 1. Попробуйте!

(*Недолгая пауза*)

– Готово! Сначала переносим направо самый левый столбец, а потом вниз – самую верхнюю строку (рис. 3). Значит, ровно половина (пункт «а») достижима.

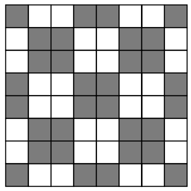


Рис. 3

– Верно. А как насчёт 60 процентов?

(*Очень долгая пауза*)

– Что приуныли? Ага, вижу: перебираете варианты. Действительно, кроме рисунка 3, по идее, надо бы рассмотреть другие возможные расположения, а потом отобрать те из них, где доля капустных грядок наибольшая. Правильно?

– Да...

– А на самом деле – нет!

– Почему?

– Для ответа на этот вопрос приведу широко известную задачу Вячеслава Викторовича Произволова[3]:

На балу каждый кавалер танцевал с тремя дамами, а каждая дама – с тремя кавалерами. Докажите, что на балу число дам равнялось числу кавалеров.

Решается она почти мгновенно. Определим двумя способами число различных танцевавших пар. Если число кавалеров принять за k, то число пар было $3k$, так как каждый кавалер танцевал с тремя дамами. Если число дам принять за m, то число пар было $3m$, так как каждая дама танцевала с тремя кавалерами. Значит, $3k = 3m$, откуда $k = m$. Всё! Подумайте, нельзя ли использовать такой же подход в нашем огороде.

– А, понятно! Будем считать, что соседние грядки с разными овощами попарно «танцуют». Пусть число капустных грядок равно k, а морковных – m. Тогда с одной стороны число «танцевальных пар» равно $2k$, а с другой – $2m$. Значит, $2k = 2m$, откуда $k = m$.

– Вот видите, прежде чем бросаться в атаку, порой следует продумать обходной манёвр. На сегодня всё, а на дом оставляю вам такую задачу:

Может ли Кролик так рассадить овощи на своём огороде, чтобы каждая капустная грядка граничила с ***двумя морковными****, а каждая морковная – с* ***одной капустной****?*

Попробуйте и вы разобраться с последней задачей. Если не получится – посмотрите в «Ответы».

[3] См., например, книгу В.Произволова «Задачи на вырост», §1, задача 1.

Художник Алексей Вайнер

НАШ КОНКУРС (Квантик № 1, 2019)

21. *Из спичек сложен равносторонний треугольник со стороной 2 (рис. 1). Два игрока по очереди убирают по одной спичке. Проигрывает игрок, после хода которого не останется ни одного треугольника, составленного из трёх спичек. Кто может обеспечить себе победу – начинающий или его противник – и как ему играть?*

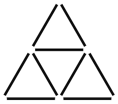


Рис. 1

Ответ: выигрывает второй игрок. Для этого своим первым ходом пусть он возьмёт спичку, параллельную той спичке, которую взял первый игрок, но не лежащую с ней на одной прямой. Например, если первый игрок взял одну из красных спичек (рисунок 2), то второй игрок возьмёт синюю спичку, а если первый игрок взял синюю спичку, то второй игрок возьмёт любую из красных спичек.

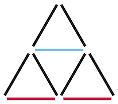


Рис. 2

Легко видеть, что после двух ходов (один ход первого игрока и один ход второго) останется только один треугольник, составленный из трёх спичек (скажем, зелёный треугольник на рисунке 3). При последующих ходах, чтобы не разрушить зелёный треугольник и не проиграть, игроки будут вынуждены брать спички, не входящие в этот треугольник. Таких спичек четыре, так что первым взять одну из зелёных спичек (и проиграть) придётся первому игроку.

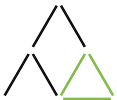


Рис. 3

22. *Придумайте какое-нибудь число, квадрат которого состоит только из цифр 1, 2, 3 и все эти цифры присутствуют.*

Ответ: например, $12321 = 111^2$.

23. *Сад в форме квадрата 6×6 окружён невысоким забором. Садовник хочет посадить в саду яблони (не более одной в каждой клетке квадрата) так, чтобы ни одна яблоня не была в тени. Яблоня находится в тени, если с четырёх сторон от неё (в четырёх соседних по стороне клетках сада) растёт по яблоне. Какое наибольшее число яблонь может посадить садовник? Приведите пример и докажите, что больше яблонь посадить нельзя.*

Ответ: наибольшее число яблонь равно 32.

На рисунке 4, показано, что садовник может посадить в саду 32 яблони так, что ни одна из яблонь не будет в тени (то есть ни одна из яблонь не будет с четырёх сторон окружена другими яблонями).

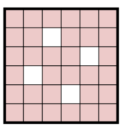


Рис. 4

Более 32 яблонь садовник не может посадить по следующей причине: в каждом из четырёх изображённых на рисунке 5 квадратов 3×3 обязательно должна быть хотя бы одна клетка без яблони, поскольку в противном случае яблоня, находящаяся в центральной клетке квадрата 3×3, заведомо будет находиться в тени.

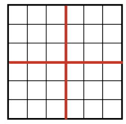


Рис. 5

24. *Петя и Вася купили по конструктору «Собери тетраэдр». В конструкторе 4 треугольника – будущие грани тетраэдра. По дороге Петя потерял один треугольник. Заметив это дома, он побежал с остатками своего конструктора к Васе. Сравнивая детали, они обнаружили, что среди четырёх Васиных треугольников есть три таких же, как у Пети. «Отлично, теперь я знаю, какой треугольник я потерял!» – воскликнул Петя. «Вот только почему цены конструкторов отличаются?» – задумался он. А могло ли быть так, что у ребят конструкторы отличались одним треугольником, но из каждого можно было собрать свой тетраэдр?*

Ответ: так могло быть. Приведём пример. Пусть в конструкторе Пети четыре равнобедренных треугольника с рёбрами по 2 см и основанием 1 см, а у Васи – три таких же треугольника, а четвёртый – равносторонний треугольник со стороной 1 см. Тогда Петя сможет собрать тетраэдр как на рисунке 6, а Вася – как на рисунке 7.

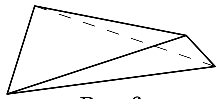


Рис. 6

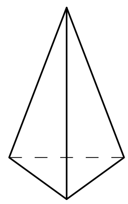


Рис. 7

25. *Найдутся ли 100 различных натуральных чисел, никакие два из которых не имеют общих множителей, больших 1, но среднее арифметическое любых нескольких из них – целое?*

Ответ: да, найдутся. Например, подходят числа $1 \cdot 100! + 1$, $2 \cdot 100! + 1$, $3 \cdot 100! + 1$, ..., $100 \cdot 100! + 1$ (где $100!$ – это $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100$). Сумма любых k из них (где k от 1 до 100) будет делиться на k, поскольку имеет вид $N \cdot 100! + k$, а $100!$ делится на k, так как делится на все числа от 1 до 100. Это и значит, что среднее арифметическое любых нескольких чисел из нашего примера – целое.

Покажем ещё, что в приведённом примере нет чисел с общим множителем, большим 1.

Предположим противное: какие-то два числа из примера – скажем, $a\cdot 100!+1$ и $b\cdot 100!+$ $+1$, – делятся на простое число p. Тогда $p>100$ (иначе на p делилось бы и число 100!, и, следовательно, число 1, что невозможно). Разность наших двух чисел $(a-b)\cdot 100!$ тоже делится на p, но у этой разности, очевидно, нет простых делителей, больших 100. Противоречие.

ПРИВЕТ ОТ «ПИОНЕРА»! (Квантик № 1, 2019)

Сначала для порядка решим исходную задачу Н. Разговорова.

И в первый, и во второй день Мюнхгаузен в заказ включил «мач». И в оба этих дня получил единственное общее блюдо – рисовый суп. Значит, «мач» – это рисовый суп, ну, а «кули» (который он тоже заказал в первый день) – пирожное.

Аналогично, сравнивая питание на второй и третий день, определяем, что «ахи» – бифштекс, а «пуро» – печёные яблоки.

Снова вернувшись во второй день, методом исключения выясняем, что «амали» – компот.

Всё! И потому на четвёртый день барон уже достоверно знал, что заказанные им «мач», «ахи» и «кули» – это рисовый суп, бифштекс и пирожное соответственно.

Как видно, с пятью блюдами Мюнхгаузен справился. Но вряд ли это максимум. Каков же он? Оказывается, наибольшее возможное число – 7. Покажем, как этого можно добиться. Чтобы не ломать язык мудрёными словечками, предварительно присвоим названиям блюд просто номера от 1 до 7. А далее пусть барон действует так:

– блюдо № 1 он закажет только в 1-й день, № 2 – только во второй, № 3 – только в третий;
– блюдо № 4 он закажет в первый и во второй день, № 5 – в первый и в третий, № 6 – во второй и в третий;
– блюдо № 7 он закажет во все три дня.

Дальнейшее ясно. Определив, сколько раз подавалось каждое из семи блюд и в какие именно дни, барон без труда сможет сопоставить их с названиями.

Убедимся, что больше семи блюд распознать нельзя. Сопоставим каждому блюду код: тройку чисел 0 и 1, где 0 значит, что в соответствующий день блюдо не было подано, а 1 – что было. Например, если блюдо было подано в первый и третий дни, то соответствующий код – 101.

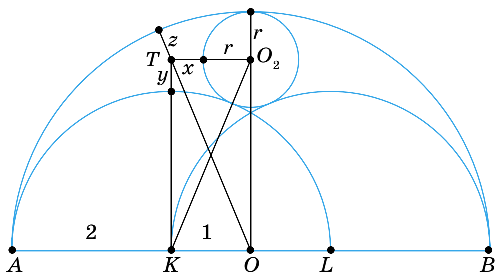
В каком случае Мюнхгаузен может распознать блюдо? Во-первых, ему необходимо хотя бы раз его заказать, то есть код блюда содержит единицу. Во-вторых, набор дней, в которые он заказывал данное блюдо, не должен совпадать с набором дней никакого другого блюда, то есть у разных блюд коды разные.

Всего может быть 7 различных кодов: 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 (код 000 мы отбросили, так как там нет 1). Значит, всего Мюнхгаузен мог распознать не более 7 блюд.

Аналогично можно дать ответ о максимальном количестве распознаваемых блюд, если в распоряжении барона не 3, а n дней. Оно равно 2^n-1. В случае с бароном $n=3$, и $2^3-1=7$.

ОКРУЖНОСТИ В ОКНЕ (Квантик № 2, 2019)

Пусть K, O и L – центры полуокружностей (см. рисунок ниже). Заметим, что диаметр AB большой полуокружности состоит из трёх радиусов малых полуокружностей (AK, KL и LB). Приняв радиус малой полуокружности за 2, получим тогда, что $AB=3$.



Пусть центральная синяя окружность (с центром O_2), касающаяся всех полуокружностей, имеет радиус r. Из симметрии картинки, отрезок O_2O перпендикулярен AB. По трём точкам O_2, O и K построим прямоугольник O_2OKT и докажем, что его четвёртая вершина T – искомый центр O_1 окружности, которая касается большой и левой малой полуокружностей и центральной синей окружности.

Обозначим расстояния от точки T: до центральной синей окружности – через x, до левой малой полуокружности – через y, до большой полуокружности – через z. (Напомним, что расстояние от точки T до окружности – это расстояние от T до ближайшей к ней точки окружности, а такая точка находится на прямой, соединяющей T с центром окружности.)

Запишем равенство верхней и нижней сторон прямоугольника: $x+r=3-2$, равенство его левой и правой сторон: $2+y=3-r$, и равенство его диагоналей: $3-z=2+r$. Из этих равенств получаем, что $x=y=z=1-r$, то есть T – действительно центр искомой окружности. Аналогично находится центр O_3.

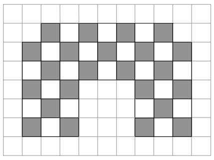
Итак, центры O_1, O_2, O_3 всех трёх синих окружностей лежат на одной прямой, параллельной AB.

ДВЕ ВЕРЁВКИ

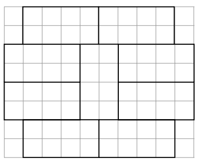
Пусть сначала Квантик поможет Ноутику крепко схватиться за правую верёвку. Потом Квантик раскачивает эту верёвку, берёт в руку конец левой верёвки, а второй рукой ловит раскачивающуюся верёвку. Ноутик спрыгивает, а Квантик завязывает узел. Если есть опасность, что Ноутик сорвётся и ударится, лучше для раскачивания прицепить к левой верёвке огнетушитель (он виден в углу сцены).

ЗАМКИ

1. Ответ: нет, не могут. Раскрасим схему залов в шахматном порядке, как показано на рисунке справа. Предположим, что требуемый обход возможен. Заметим, что «чёрные» и «белые» залы при таком обходе чередуются. Это означает, что количество чёрных и белых залов должно отличаться не более чем на 1. Но на схеме чёрных залов на 3 больше, чем белых. Получаем противоречие.



2. Ответ: да, может. Пример показан на рисунке справа. Любой из 8 залов граничит с центральным залом по участку, в котором может быть устроен проход в центральный зал.



3. Старые замки строили для обороны от врагов. В случае, если враги прорвались в замок и поднимаются по лестнице, правильная конструкция лестницы позволяла воину-правше (а таких большинство) держать оборону и наносить удары, орудуя мечом, при этом скрываясь за лестничной колонной. (См. также статью Сергея Дворянинова «Винтовая линия» в «Квантике» №3 за 2014 год.)

4. Ответ: да. Покажем, как это можно сделать. Узник зажигает лампу в той комнате, где он находится. Назовём эту комнату «исходной». Затем он проходит в соседние комнаты до тех пор, пока не окажется в комнате, где горит лампа. Пусть это комната k-я по счёту на его пути (не считая исходной). Он гасит лампу, возвращается назад тем же маршрутом (отсчитывая k комнат) и смотрит, горит ли лампа в исходной комнате. Если не горит, то он сделал полный круг и общее число комнат в замке равно k. Если же лампа горит, то узник повторяет своё действие, продвигаясь всё дальше по кругу до следующей горящей лампы. В конце концов он сделает полный круг и поймёт это, вернувшись в исходную комнату и обнаружив, что лампа погашена!

ОГОРОДНОЕ ЗАНЯТИЕ

Всё та же «схема Произволова» решает задачу легко и просто. Пусть число капустных грядок равно k, а морковных – m. Тогда, с одной стороны, число пар равно $2k$, а с другой – m. Значит, $2k=m$, и суммарное число грядок равно $k+m=k+2k=3k$, то есть должно делиться на 3. Но 64 на 3 не делится! Поэтому распланировать грядки указанным образом невозможно.

НАШ КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Высылайте решения задач VII тура, с которыми справитесь, не позднее 1 апреля в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: v.ht/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

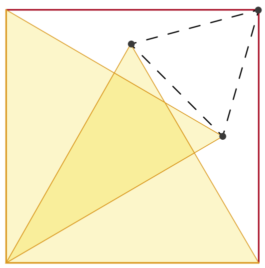
VII ТУР

31. По окружности расставили числа 1, 2, 3, … , 100 так, что любые два соседних числа отличаются не более чем на 2. Могут ли при этом числа 50 и 51 не быть соседями друг друга?

32. Клетчатый квадрат 7×7 разрезали по линиям сетки на различные прямоугольники. Какое наибольшее число прямоугольников могло получиться?

Авторы: Павел Кожевников (31), Михаил Евдокимов (32, 33), Александр Ковальджи (35)

33. Каждый из кандидатов в мэры либо лжец (всегда лжёт), либо правдолюб (всегда говорит правду), и все кандидаты знают, кто есть кто. В начале дебатов каждый из 25 кандидатов заявил: «Среди остальных присутствующих кандидатов лжецов больше, чем правдолюбов». После того как подошёл опоздавший 26-й кандидат, каждый из кандидатов повторил своё заявление. Кем является опоздавший: лжецом или правдолюбом?



34. Два жёлтых равносторонних треугольника расположены в квадрате, как показано на рисунке. Докажите, что три выделенные точки образуют равносторонний треугольник.

35. По кругу выкладывают 30 одинаковых на вид таблеток, из них 20 хороших и 10 плохих. Два мудреца по очереди берут по одной таблетке. Первый мудрец будет знать, где лежат плохие таблетки, а второй – нет, но они хотят до выкладывания таблеток договориться, как после каждого хода первого второй найдёт хорошую таблетку. После 20 ходов на столе должны остаться 10 плохих таблеток. Предложите алгоритм действий для мудрецов. (Беря таблетки, мудрецы не общаются и не подают никаких знаков. Каждый видит, какую таблетку взял партнёр.)

Художник Николай Крутиков

ДЫРКИ В ШТОРКЕ

Окно комнаты занавешено шторкой. В шторке есть квадратная дырка со стороной в пару миллиметров. Садящееся солнце через дырку оставляет на стене комнаты, противоположной окну, пятно. Определите его форму.

Вдруг солнце частично зашло за угол дома, как на картинке. Каким теперь будет пятно?

А если в шторке несколько дырок, что мы увидим на стене?

Художник Мария Усеинова

ISSN 2227-7986 19003
9 772227 798190