Сергей Волчёнков

ЧЕМ КРУГ ОТЛИЧАЕТСЯ ОТ КВАДРАТА?

С первого взгляда вопрос кажется странным. Каждый знает, что такое круг и что такое квадрат, и каждый знает, что это разные геометрические объекты. Но в этой статье речь пойдёт не столько о геометрии, сколько о комбинаторной геометрии, то есть о разделе математики, где геометрические объекты рассматриваются с комбинаторной точки зрения – как элементы конечных множеств. Мы разберём три задачи, в которых круги и квадраты какими-то своими, с первого взгляда, незначительными различиями порождают различные ответы.

Задача 1 про круги. *На плоскости расположено 5 кругов, каждые два из которых имеют общую точку. Верно ли, что среди них всегда найдутся 3 круга, имеющих общую точку?*

Ответ: верно.

Доказательство. Обозначим круги (и их центры) буквами O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 соответственно. Соединим центры друг с другом отрезками. Какие-то два из проведённых отрезков должны пересечься. Это известный факт (даже если точки пытаться соединять ломаными) – попробуйте доказать его самостоятельно или см. в конец статьи. Пусть пересекаются отрезки O_1O_2 и O_3O_4 в точке X (рис. 1).

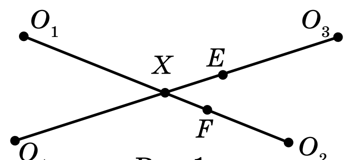


Рис.1

Осталось доказать, что верна такая

Лемма. *Если есть две пары пересекающихся кругов (пара O_1, O_2 и пара O_3, O_4), причём отрезки O_1O_2 и O_3O_4 имеют общую точку (X), то какие-то три из этих четырёх кругов имеют общую точку.*

Так как круги O_1 и O_2 пересекаются, на отрезке O_1O_2 есть точка F, принадлежащая им обоим. Аналогично, на отрезке O_3O_4 есть точка E, принадлежащая кругам O_3 и O_4. Пусть они расположены как на рисунке 1, причём $XE \geqslant XF$ (остальные случаи аналогичны).

Тогда $O_4E \geqslant O_4X + XF \geqslant O_4F$, то есть точка F принадлежит кругам O_1, O_2 и O_4. Лемма доказана.

Задача 1 про квадраты. *На плоскости расположено 5 квадратов, каждые два из которых имеют* *общую точку. Верно ли, что всегда найдутся 3 квадрата, имеющих общую точку?*

Ответ: неверно. Контрпример изображён на рисунке 2.

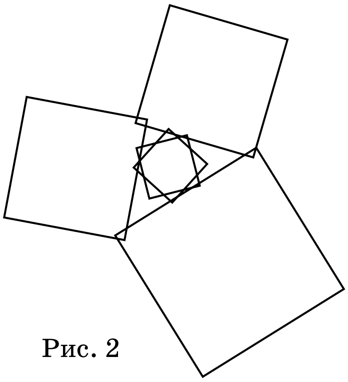


Рис. 2

Задача 2 про круги.

На плоскости расположено 3 красных и 3 синих круга, причём каждые два разноцветных круга имеют общую точку. Верно ли, что всегда найдутся два одноцветных круга, имеющих общую точку?

Ответ: верно.

Доказательство. Соединим центры разноцветных кругов друг с другом отрезками. Какие-то два из проведённых отрезков должны пересечься. Это тоже известный факт, часто называемый «три дома, три колодца» (докажите или см. в конец статьи).

Тогда, по лемме из задачи 1, какие-то три круга имеют общую точку. А среди этих трёх найдутся два круга одного цвета, что и требовалось.

Задача 2 про квадраты. *На плоскости расположено 3 красных и 3 синих квадрата, причём каждые два разноцветных квадрата имеют общую точку. Верно ли, что всегда найдутся два одноцветных квадрата, имеющих общую точку?*

Ответ: неверно. Контрпример изображён на рисунке 3.

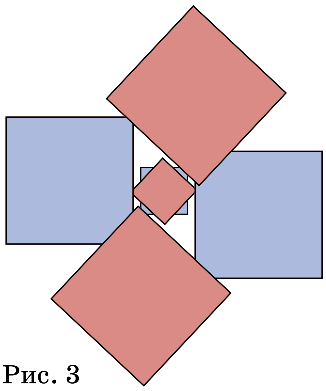
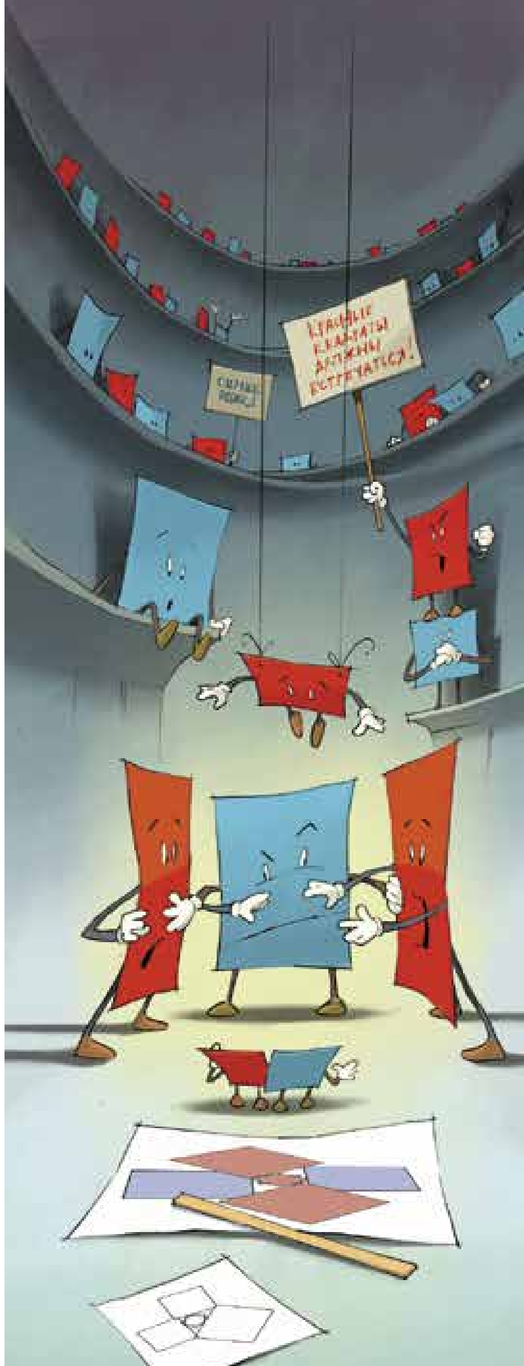


Рис. 3

Замечание. В задачах 1 и 2 про квадраты можно заменить квадраты на другие многоугольники, в частности на правильные N-угольники, где N сколь угодно велико. При этом многоугольники становятся почти неотличимыми от кругов. Правда, картинки 2 и 3 пришлось бы рассматривать под микроскопом, чтобы увидеть на них все пересечения.

Задача 3 про круги. *В выпуклом многоугольнике расположено N непересекающихся кругов. Верно ли, что многоугольник всегда можно разрезать на N*



выпуклых многоугольников, каждый из которых будет содержать ровно один из кругов?

Прежде чем переходить к решению этой задачи, рассмотрим более простую задачу.

Задача 3 про точки. *В выпуклом многоугольнике отмечено N точек (с номерами от 1 до N). Верно ли, что многоугольник всегда можно разрезать на N выпуклых многоугольников, каждый из которых будет содержать ровно одну отмеченную точку?*

Ответ: верно.

Доказательство. Разобьём многоугольник на области с номерами от 1 до N по такому правилу: область с номером k состоит из точек, более близких к точке k, чем к любой другой отмеченной точке (такое разбиение называется *диаграммой Вороного*). При таком разбиении область с номером k ограничена серединными перпендикулярами отрезков, проведённых из точки k к остальным отмеченным точкам, то есть является выпуклым многоугольником.

Пример такой диаграммы приведён на рисунке 4.

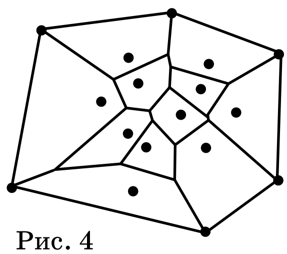


Рис. 4

А теперь перейдём к задаче 3 про круги. Оказывается, что нужное нам разбиение многоугольника может быть образовано не серединными перпендикулярами, а так называемыми *радикальными осями* окружностей.

Радикальная ось двух непересекающихся окружностей – это геометрическое место точек, касательные из которых, проведённые к двум данным окружностям, имеют равные длины.

Нетрудно показать, что радикальная ось двух окружностей любых радиусов с несовпадающими центрами – это прямая (см. в конец статьи). Если окружности не пересекаются, они будут целиком по разные стороны от радикальной оси. Разобьём тогда точки многоугольника (лежащие снаружи окружностей) на области, состоящие из точек, касательные из которых к одной окружности короче, чем к другим. Аналогично получим, что каждая окружность лежит целиком в одной области, и эта область – выпуклый многоугольник.

Кстати, в случае «окружностей» нулевого радиуса касательные превращаются в расстояния до центров, и получается предыдущая задача.

И последняя

Задача 3 про квадраты. *В выпуклом многоугольнике расположено N непересекающихся квадратов. Верно ли, что многоугольник всегда можно разрезать на N выпуклых многоугольников, каждый из которых будет содержать ровно один из квадратов?*

Ответ: неверно. Контрпример см. на рисунке 5.

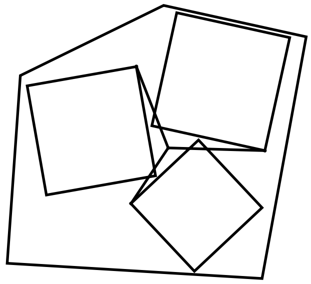


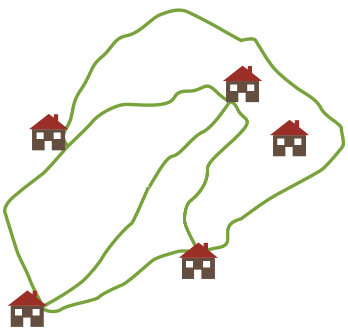
Рис. 5

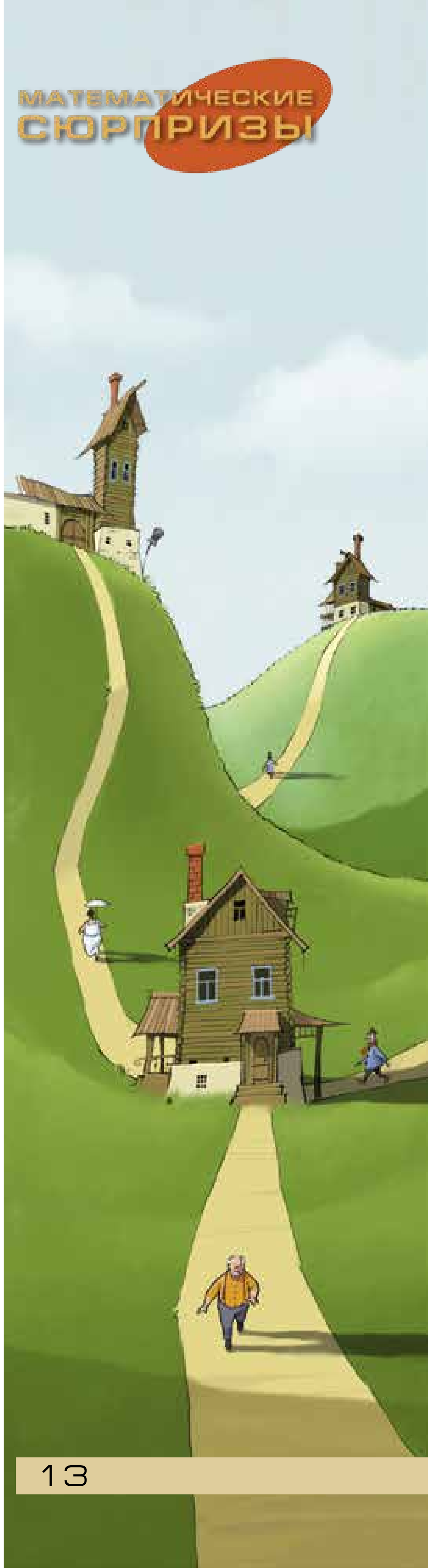
Пояснение. В пятиугольнике расположены три квадрата. Разрезать пятиугольник на три выпуклые части, каждая из которых содержит один квадрат, невозможно. Точка в центре рисунка не может принадлежать ни одной из частей, так как каждый из трёх отрезков, идущих из неё к одной из точек квадратов, будет пересекать контур другого квадрата, то есть ни один из этих отрезков не будет принадлежать выпуклой фигуре.

ОТ РЕДАКЦИИ

Пять домов. *Докажем, что на плоскости нельзя соединить друг с другом пять домов непересекающимися дорожками так, чтобы каждый дом был соединён с каждым отдельной дорожкой.*

Допустим, это всё-таки удалось сделать. Уберём все дорожки и будем возвращать их последовательно. Сначала добавим четыре дорожки, соединяющие четыре дома по циклу, получится «четырёхугольник» из дорожек. Соединим теперь пары противоположных вершин этого четырёхугольника (проведём «диагонали»). Одна диагональ будет внутри, другая – снаружи. В результате плоскость разделится на три «треугольника» и бесконечную часть, граница которой тоже будет треугольником (назовём эту

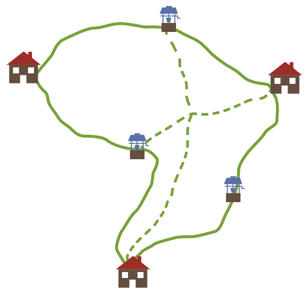




часть «бесконечным» треугольником). Пятый дом окажется в одном из этих треугольников, и его можно будет соединить только с тремя вершинами этого треугольника. Противоречие – останется ещё один дом, который нельзя соединить с пятым.

Три дома и три колодца. *Докажем, что на плоскости нельзя соединить непересекающимися дорожками три дома с тремя колодцами так, чтобы каждый дом был соединён с каждым колодцем отдельной дорожкой.*

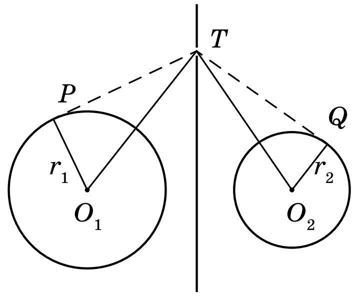
Допустим, это всё-таки удалось сделать. Уберём все дорожки и будем возвращать их последовательно. Сначала обойдём по замкнутому циклу все дома и колодцы. Так как дорожки не пересекаются, это будет «шестиугольник» из дорожек, причём дома и колодцы в нём чередуются. Осталось провести ещё три дорожки, соединяющие противоположные вершины шестиугольника. Хотя бы две из этих трёх дорожек попадут обе либо внутрь, либо наружу шестиугольника и неизбежно пересекутся.



Радикальные оси. Пусть даны две окружности с различными центрами O_1, O_2 и радиусами r_1, r_2 соответственно. Пусть точка O_1 имеет координаты (a, b), а точка O_2 – координаты (c, d). Найдём все такие точки $T(x, y)$, что касательные TP и TQ к нашим окружностям, проведённые из этой точки, равны. Касательные равны, когда равны их квадраты, а квадраты касательных можно найти по теореме Пифагора:

$$TP^2 = TO_1^2 - O_1P^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r_1^2;$$
$$TQ^2 = TO_2^2 - O_2Q^2 = (x-c)^2 + (y-d)^2 - r_2^2.$$

Приравнивая TP^2 и TQ^2, видим, что квадраты иксов и игреков взаимно уничтожаются и получается уравнение вида $mx + ny - k = 0$, которое задаёт прямую, если хотя бы один из коэффициентов m и n ненулевой (а это так, поскольку центры окружностей различны).



Художник Алексей Вайнер