Игорь Акулич

Экономичное занятие

– Сегодняшнее занятие нашего математического кружка назовём *экономичным*.

– Деньги будем считать?

– Нет, *трудозатраты* в простейших геометрических построениях циркулем и линейкой.

Напомню, что взяв линейку, мы можем выбрать две любые точки и провести через них прямую. Взяв же циркуль, мы можем измерить им расстояние между двумя любыми точками, а потом поместить остриё циркуля в любую точку и провести окружность, радиус которой равен этому расстоянию. Иногда, чтобы не загромождать чертёж, проводят не окружность целиком, а только её часть, то есть дугу.

А теперь задача: на плоскости даны прямая l и точка M вне её. Кто построит циркулем и линейкой перпендикуляр p к прямой l, проходящий через точку M?

– Я!

– Я!

– ...

– Вижу, что все готовы. Давайте вы, пожалуйста!

– Сначала выбираем на прямой l произвольную точку A и проводим окружность радиусом MA с центром в точке M, пересекающую прямую l ещё и в точке B (синяя окружность на рисунке 1). Затем проводим ещё две окружности *одинакового радиуса* с центрами в точках A и B (красные окружности на рисунке 1). Через точку N пересечения красных окружностей и точку M проводим прямую – это и будет перпендикуляр p.

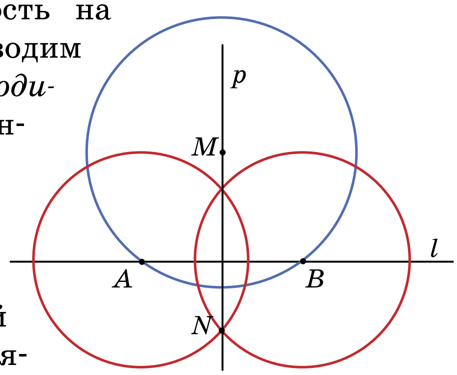


Рис. 1

– Что ж, построение безупречно. Но есть несколько вопросов. Во-первых, можете ли вы *доказать*, что прямая p – действительно перпендикуляр к прямой l?

– Конечно. Соединим точки так, чтобы получился четырёхугольник $AMBN$ (рис. 2). Стороны треугольников MAN и MBN соответственно равны (по

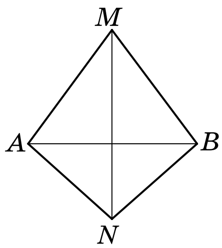


Рис. 2

построению). Значит, и сами треугольники равны и «приложены» с разных сторон к общей стороне MN. Поэтому они симметричны друг другу относительно MN. А из симметрии точек A и B следует, что они лежат на одном перпендикуляре к оси симметрии. Так что $AB \perp MN$.

– Верно. Добавлю, что четырёхугольник, у которого две соседние стороны равны между собой и две другие тоже равны, называется *дельтоид*. Как раз таков четырёхугольник $AMBN$ (в нём $MA = MB$ и $AN = BN$). И здесь вы между делом доказали, что *диагонали дельтоида взаимно перпендикулярны*.

Теперь второй вопрос: а если синяя окружность пересекла прямую l *только в одной точке* A (иначе говоря, точки B и A совпали)? Тогда мы не сможем провести две красные окружности. Как здесь быть?

– Я понял! Если синяя окружность имеет с прямой l лишь одну общую точку, то прямая *касается* окружности. Так как касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания, отрезок MA *перпендикулярен* прямой l. То есть надо сразу провести прямую через точки M и A – это и будет искомый перпендикуляр.

– Прекрасно. Отмечу только, что так удачно выбрать наугад из *бесконечного* количества точек прямой единственную лежащую на перпендикуляре – практически нереально (да и теоретически тоже).

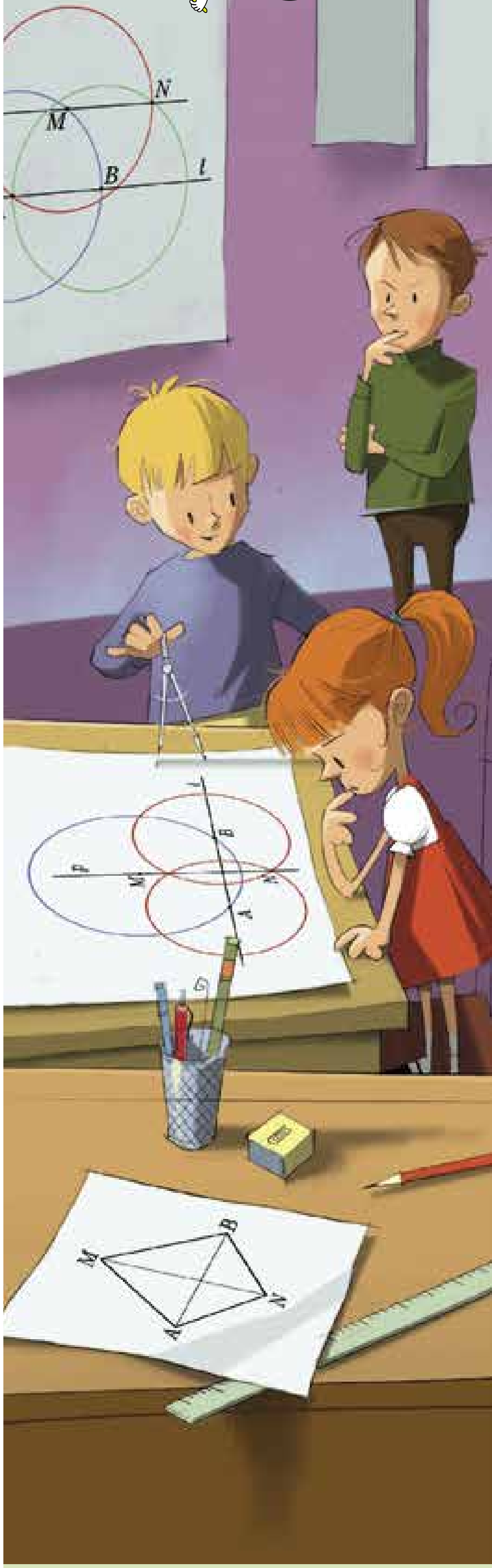
И последний вопрос: как построить перпендикуляр, если точка M лежит на прямой l?

– Точно так же! Проводим синюю окружность, получаем точки A и B – и так далее...

– Что ж, вижу, материал из учебника усвоен вами накрепко. А теперь нечто новое: займёмся *оценкой трудоёмкости* выполненных построений. Давайте считать, что проведение любой линии (прямой или окружности) – это один «ход». Сколько ходов потребовалось для построения перпендикуляра?

– Четыре: три окружности (синяя и две красных) и потом прямая (то есть сам перпендикуляр).

– А можно быстрее! Снова берём прямую l и точку M вне её. Выбираем на прямой l произвольную точ-



ку A и проводим окружность радиусом AM с центром в A (синяя окружность на рисунке 3). Затем выбираем на той же прямой произвольную точку B и проводим окружность радиусом BM с центром в B (красная окружность на рисунке 3). Эти две окружности пересекаются в двух точках, одна из которых – заданная точка M, а вторую обозначим буквой N. Наконец, проводим отрезок MN, который и будет искомым перпендикуляром. Итого – три хода вместо четырёх!

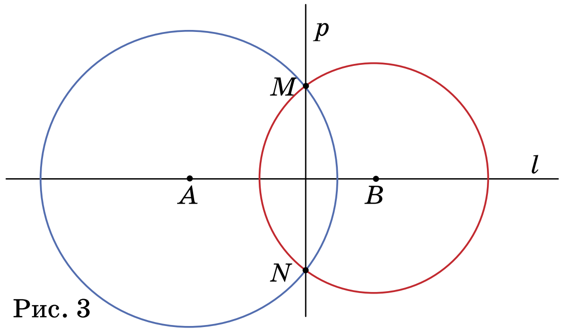


Рис. 3

– А это правда перпендикуляр?

– Конечно. Если мысленно провести отрезки и образовать четырёхугольник $AMBN$, то в нём $AM = AN$ (как радиусы одной окружности) и $BM = BN$ (по той же причине). Значит, $AMBN$ – *дельтоид*, только «лежащий на боку», и его диагонали перпендикулярны.

– Ничего себе! Но если M лежит на прямой l, этот способ неприменим – ведь тогда окружности касаются друг друга, и второй точки их пересечения нет!

– Вы правы. Но и тут есть иной способ построения, столь же экономный. Итак, пусть точка M лежит на прямой l. Сначала выбираем произвольную точку A вне прямой l и проводим окружность радиусом AM с центром в A. Она пересечёт прямую l ещё в точке B. Через точки A и B проводим прямую, пересекающую окружность в точке N. И проводим прямую MN, которая и есть искомый перпендикуляр p (рис.4).

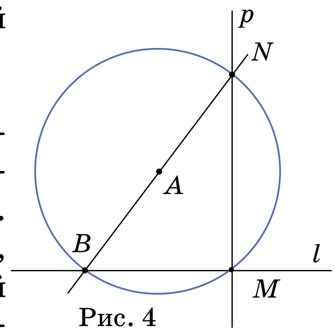


Рис. 4

– ???

– Что, совсем несуразно выглядит? А между тем доказательство тоже очень простое. Из наших построений следует, что BN – диаметр проведённой окружности, а $\angle BMN$ – вписанный угол, опирающийся на этот диаметр. Но такой угол всегда прямой!

– Ух ты! Но... вдруг нам не повезёт, и мы случайно выберем такую точку A, что окружность не пересечёт прямую l во *второй* точке B, а будет *касаться* её в точке M? Иначе говоря, точки B и M совпадут?

– Наоборот, в случае такого невероятного везения можно сразу провести перпендикуляр AM – ведь если окружность касается прямой, то радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной.

И последнее на сегодня: как через точку M, лежащую вне прямой l, провести прямую, *параллельную* l?

– Как два перпендикуляра! То есть сначала провести какой-нибудь перпендикуляр к прямой l, а потом – перпендикуляр к этому перпендикуляру, проходящий через ту же точку M.

– И сколько ходов для этого понадобится?

– Ну... если проводить перпендикуляры так, как говорится в учебнике, то это будет $4+4=8$ ходов, а если вашими «экономными» способами, то $3+3=6$.

– А можно обойтись лишь тремя ходами.

– Как?

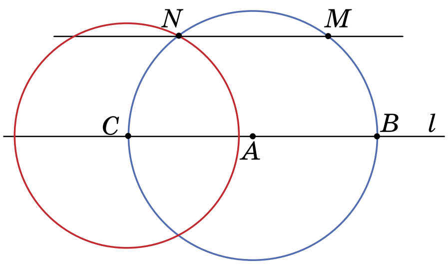
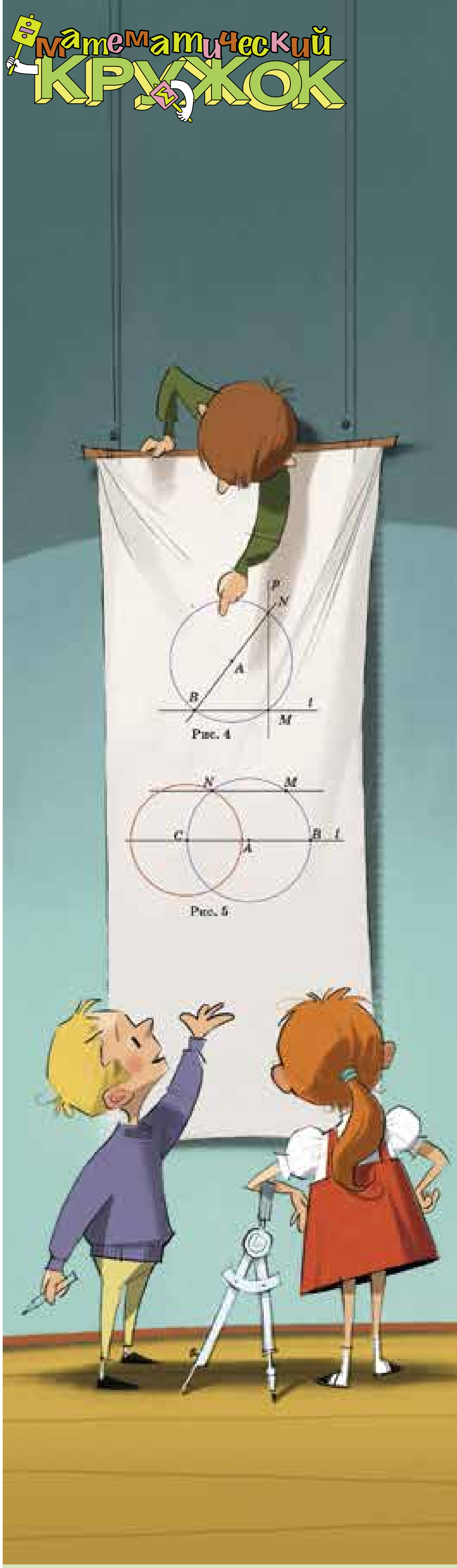


Рис. 5

– Показываю. Выбираем на прямой l произвольную точку A и проводим окружность радиусом AM с центром в A (синяя окружность на рисунке 5). Она пересечёт прямую l в точках B и C. Далее, строим окружность (красную) радиусом, равным BM, с центром в C. Она пересекается с синей окружностью в точке N (вообще-то таких точек две; надо выбрать ту, что лежит по ту же сторону от l, что и M. Наконец, проводим прямую через точки M и N – она параллельна l.

– Почему?

– Доказательство несложно и основано на симметрии. Если мысленно провести перпендикуляр к прямой l через центр синей окружности A, то полуокружности справа и слева будут симметричны между собой относительно него. И равные дуги BM и CN тоже симметричны. Значит, и точки M и N симме-



Художник Алексей Вайнер

тричны, откуда отрезок MN *перпендикулярен к перпендикуляру* к прямой l, то есть параллелен l. Всё!

– А почему дуги BM и CN равны?

– Так они же стягиваются равными хордами – отрезки BM и CN по построению равны.

– Здорово! А если N и M совпадут? Тогда мы не сможем провести через M и N *единственную* прямую.

– Верно. Это может произойти, если точка A окажется точнёхонько на перпендикуляре к прямой l, проходящем через точку M. Такое событие тоже практически невероятное, но здесь это не удача, а, наоборот, неприятность. Поэтому пренебрегать ею нельзя. И в качестве альтернативы могу предложить способ чуть длиннее, из четырёх шагов. Начало такое же: выбираем на прямой l произвольную точку A и проводим окружность радиусом AM с центром в A (синяя окружность на рисунке 6). Она пересечёт прямую l в точке B (здесь используем только одну из двух точек пересечения – любую). Далее, строим ещё две окружности такого же радиуса с центрами в точках M и B (красная и зелёная соответственно). Они пересекаются в точке N. Наконец, проводим прямую через точки M и N – она параллельна l. Доказательство несложно: если рассмотреть четырёхугольник $ABNM$, то по нашим построениям все его стороны равны, потому что они – радиусы одинаковых окружностей. Значит, $ABNM$ – ромб, а у ромба противоположные стороны параллельны. Вот и всё! Ну как, понравились сегодняшние построения?

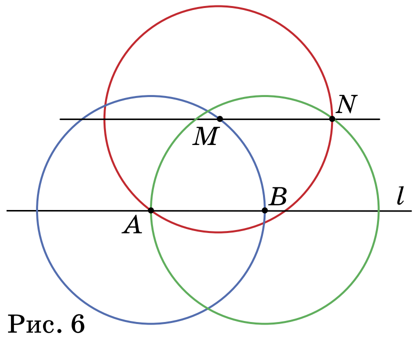


Рис. 6

– Красиво!

– Быстро!

– Я рад, что они вам по вкусу. Пользуйтесь на здоровье. Но имейте в виду – эти *экономичные* построения не очень-то широко известны, и вы должны быть готовы подтвердить их справедливость безупречным доказательством. Особенно на экзамене. Поэтому не забывайте и «классические» способы. Они тоже хороши, а главное – понятны и практически очевидны.