XL ТУРНИР ГОРОДОВ
ВЕСЕННИЙ ТУР, 8-9 КЛАССЫ

3 и 17 марта 2019 года прошёл весенний тур XL Международного математического Турнира Городов. Приводим задачи базового и сложного вариантов для 8–9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов.

Базовый вариант

1 (3 балла). В ряд выписаны несколько натуральных чисел с суммой 20. Никакое число и никакая сумма нескольких подряд записанных чисел не равна 3. Могло ли быть выписано больше 10 чисел?

Александр Шаповалов

2 (4 балла). По кругу лежат $2n+1$ монет орлом вверх. Двигаясь по часовой стрелке, делают $2n+1$ переворотов: переворачивают какую-то монету, одну монету пропускают и переворачивают следующую, две монеты пропускают и переворачивают следующую, три монеты пропускают и переворачивают следующую, и т.д., наконец пропускают $2n$ монет и переворачивают следующую. Докажите, что теперь ровно одна монета лежит решкой вверх.

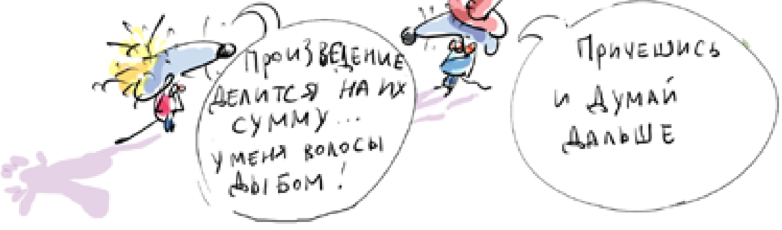
Владимир Расторгуев

3 (4 балла). Произведение натуральных чисел m и n делится на их сумму. Докажите, что $m+n \leqslant n^2$.

Борис Френкин

4 (5 баллов). В прямоугольник $ABCD$ вписывают равнобедренные треугольники с заданным углом α при вершине, противолежащей основанию, так, что эта вершина лежит на отрезке BC, а концы основания – на отрезках AB и CD. Докажите, что середины оснований у всех таких треугольников совпадают.

Игорь Жижилкин



5 (5 баллов). Фокусник с помощником показывают фокус. В ряд стоят 12 закрытых пустых шкатулок. Фокусник уходит, а зритель на виду у помощника прячет по монетке в любые две шкатулки по своему выбору. Затем возвращается фокусник. Помощник открывает одну шкатулку, в которой нет монетки. Далее фокусник указывает на 4 шкатулки, и их одновременно открывают. Цель фокусника – открыть обе шкатулки с монетками. Предложите способ, как договориться фокуснику с помощником, чтобы этот фокус всегда удавался.

Константин Кноп

Сложный вариант

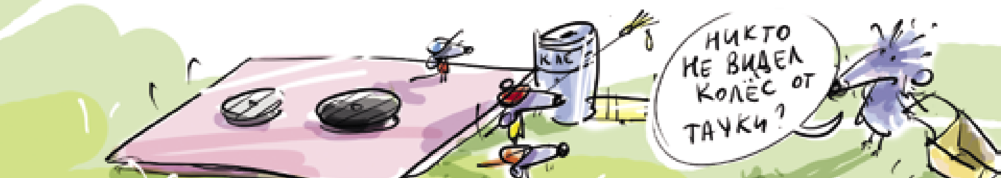
1 (5 баллов). Король вызвал двух мудрецов и объявил им задание: первый задумывает 7 различных натуральных чисел с суммой 100, тайно сообщает их королю, а второму мудрецу называет лишь четвёртое по величине из этих чисел, после чего второй должен отгадать задуманные числа. У мудрецов нет возможности сговориться. Могут ли мудрецы гарантированно справиться с заданием?

Михаил Евдокимов

2 (7 баллов). На прямой сидят 2019 точечных кузнечиков. За ход какой-нибудь из кузнечиков прыгает через какого-нибудь другого так, чтобы оказаться на прежнем расстоянии от него. Прыгая только вправо, кузнечики могут добиться того, чтобы какие-то двое из них оказались на расстоянии ровно 1 мм друг от друга. Докажите, что кузнечики могут добиться того же, прыгая из начального положения только влево.

Сергей Дориченко

3 (7 баллов). К плоскости приклеены два непересекающихся деревянных круга одинакового размера – серый и чёрный. Дан деревянный треугольник, одна сторона которого серая, а другая – чёрная. Его передвигают так, чтобы круги были снаружи треугольника, причём серая сторона касалась серого круга, а чёрная – чёрного (касание происходит не



в вершинах). Докажите, что прямая, содержащая биссектрису угла между серой и чёрной сторонами, всегда проходит через одну и ту же точку плоскости.

Егор Бакаев,
Павел Кожевников,
Владимир Расторгуев

4 (8 баллов). Каждый отрезок с концами в вершинах правильного 100-угольника покрасили – в красный цвет, если между его концами чётное число вершин, и в синий – в противном случае (в частности, все стороны 100-угольника красные). В вершинах расставили числа, сумма квадратов которых равна 1, а на отрезках – произведения чисел в концах. Затем из суммы чисел на красных отрезках вычли сумму чисел на синих. Какое наибольшее число могло получиться?

Илья Богданов

5 (9 баллов). В клетках квадратной таблицы $n \times n$, где $n > 1$, требуется расставить различные целые числа от 1 до n^2 так, чтобы каждые два последовательных числа оказались в соседних по стороне клетках, а каждые два числа, дающие одинаковые остатки при делении на n, – в разных строках и в разных столбцах. При каких n это возможно?

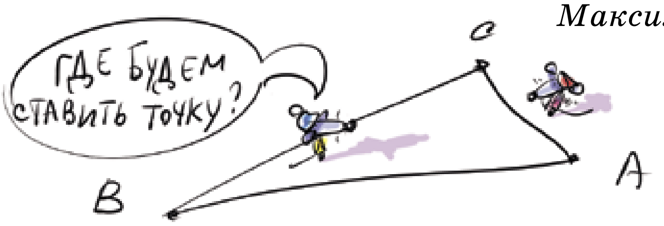
Александр Грибалко

6 (9 баллов). Внутри равнобедренного треугольника ABC отмечена точка K так, что $CK = AB = BC$ и угол KAC равен 30°. Найдите угол AKB.

Егор Бакаев

7 (12 баллов). Есть 100 кучек по 400 камней в каждой. За ход Петя выбирает две кучки, удаляет из них по одному камню и получает за это столько очков, каков теперь модуль разности числа камней в этих двух кучках. Петя должен удалить все камни. Какое наибольшее суммарное количество очков он может при этом получить?

Максим Дидин



Художник Сергей Чуб