Григорий Мерзон

1/3, ИЛИ ДВЕ НЕВОЗМОЖНЫЕ ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

– Мы сами знаем, что она не имеет решения, – сказал Хунта, немедленно ощетиниваясь. – Мы хотим знать, как её решать.

А. и Б. Стругацкие, «Понедельник начинается в субботу»

Задача 1.

Квантик хочет разыграть приз между тремя читателями (так, чтобы у каждого была одинаковая вероятность получить приз). Как ему это сделать, если у него есть только правильная монета (то есть, у этой монеты орёл или решка выпадают с вероятностью 1/2)?

Задача 2.

Математики А и Б заключены в одиночных камерах. Каждый из них должен подкинуть правильную монету 1000 раз, после чего назвать по одному числу, a и b. Если каждый угадал номер одного из орлов в последовательности партнёра, то обоих отпустят. Как им действовать, чтобы освободиться с вероятностью больше 1/4?

На первый взгляд, в обеих задачах просят невозможного. Действительно, в первой задаче если монетку подкидывали дважды, то вероятность любого исхода – сколько-то четвёртых, трижды – сколько-то восьмых, четырежды – сколько-то шестнадцатых… короче говоря, может получиться только дробь, знаменатель которой – степень двойки, но никак не 1/3.

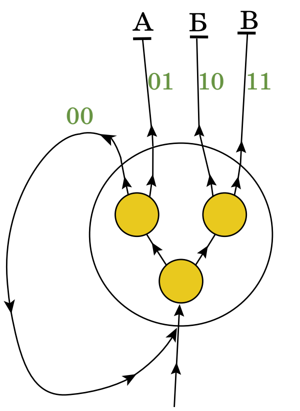
Невозможность во второй задаче ещё более очевидна: никакой информацией А и Б обмениваться не могут, их монеты никак не связаны, так что на a-м месте у Б орёл будет стоять с вероятностью 1/2, на b-м месте у А – аналогично, а вероятность того, что оба они угадают, будет равна 1/4.

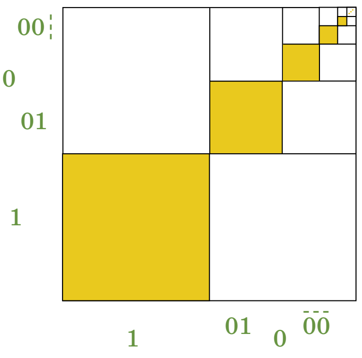
И тем не менее…

– Кажется, понимаю... – Глаза дятла Спятла вспыхнули. – Мы можем запустить здесь рекурсию!!!

К. Кохась, «Экскурсия»
(Квантик №2, 2017)

Решение задачи 1. Подкинем монетку дважды. Если выпало 01 (решка, потом орёл) – отдадим приз первому читателю, 10 – второму, 11 – третьему, а если 00... – повторим процедуру. Ясно, что вероятность получить приз у всех троих одинакова, а рано или поздно орёл выпадет.





Подумав ещё об этом решении и посмотрев на картинки, скажите, кстати, чему равна (бесконечная!) сумма 1/4+1/16+1/64+... (А как этот результат обобщить?..)

Решение задачи 2. Пусть каждый называет номер первого выпавшего у него орла. Посмотрим на ситуацию после того, как оба кинули монетку по одному разу. Если у них выпало 0 и 1 или 1 и 0 – то они проиграли, если 1 и 1 – выиграли. А если 0 и 0 – нужно кидать монеты снова... В точности как в решении предыдущей задачи, получается вероятность успеха 1/3 (на самом деле чуть-чуть меньше, если монеты кидают не бесконечно долго, а «всего» по 1000 раз).

Оказывается, можно придумать более сложную стратегию, вероятность успеха для которой – 35%. Но является ли она оптимальной – никто не знает! Доказано только, что добиться успеха с вероятностью, большей 37,5%, невозможно.

Художник Мария Усеинова