LXXXV САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Материал подготовили Надежда Власова, Константин Кохась

Санкт-Петербургская олимпиада по математике проводится для школьников с 6 по 11 класс. Второй (городской) тур очередной олимпиады для 6–8 классов прошёл 10 февраля 2019 года, на него приглашались победители районного тура. Приводим задачи для 6 класса второго тура и одну расширенную задачу для 7 класса.

Задачи II тура для 6 класса

1. Клетки таблицы 4×4 заполнены целыми числами. В каждой строке и каждом столбце посчитали произведение всех чисел. Могли ли получиться числа 1, 5, 7, 2019, −1, −5, −7, −2019 в некотором порядке?

Александр Храбров

2. Будем называть *простенькими* все нечётные простые числа, а также число 1. В ряд стоят 2019 рыцарей и лжецов. Каждый из них сказал: «Количества рыцарей справа и слева от меня отличаются на простенькое число». Сколько рыцарей может быть в этом ряду?

Александр Кузнецов

3. Для каждого числа от 1 до 1000 выписали все его натуральные делители (в результате некоторые числа выписаны много раз). Определите, что больше: сумма всех выписанных чисел или миллион?

Александр Храбров

4. В марсианском календаре дни недели называются так же, как у нас, но в каждой неделе может быть от одной до семи пятниц, из-за чего неделя может длиться от 7 до 13 дней. В разных неделях может быть разное число пятниц. Министру принесли календарь на ближайшие 2019 недель. Министр решает, какие дни недели он на этот период времени объявит выходными. (Например, он может сделать выходными все понедельники, среды и воскресенья, или просто все четверги). Докажите, что он может сделать это так, чтобы в каждой неделе не меньше 2/7 от числа дней этой недели были выходными, но при этом суммарно выходными были не более половины дней.

Надежда Власова, Константин Кохась

5. Спортзал в виде квадрата со стороной 100 метров замощён квадратными плитками 1 м × 1 м. Двое по очереди покрывают пол спортзала матами. Каждый мат покрывает две соседние по стороне плитки пола. Начинающий игру своим ходом кладёт один мат, а второй игрок – сразу три мата. Плитки, на которые кладут очередной мат, могли быть покрыты матами на предыдущих ходах (возможно, что разные плитки покрыты разным числом матов), но ни в какой момент игры ни одна плитка не должна быть покрыта более чем пятью матами. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что при правильной игре выиграет второй игрок.

Сергей Берлов

6. На встречу собралась компания. Назовём человека *общительным*, если в этой компании у него есть не меньше 20 знакомых, причём хотя бы двое из них знакомы между собой. Назовём человека *стеснительным*, если в этой компании у него есть не меньше 20 незнакомых, причем хотя бы двое из них незнакомы между собой. Оказалось, что в собравшейся компании нет ни общительных, ни стеснительных людей. Какое наибольшее число людей может в ней быть?

Фольклор

Дополнение

На самой олимпиаде для 7 класса был дан только пункт б) следующей задачи.

7. Саша выбрал четыре натуральных числа x, y, z, t и выписал 12 дробей:

$$\frac{x}{y}, \frac{x}{z}, \frac{x}{t}, \frac{y}{x}, \frac{y}{z}, \frac{y}{t}, \frac{z}{x}, \frac{z}{y}, \frac{z}{t}, \frac{t}{x}, \frac{t}{y}, \frac{t}{z}.$$

Докажите, что какие-то две дроби отличаются не больше чем на

а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{11}{60}$; в) $\frac{1}{6}$.

Александр Кузнецов

Художник Сергей Чуб