## НАШ КОНКУРС, VIII ТУР
**(«Квантик» № 4, 2019)**

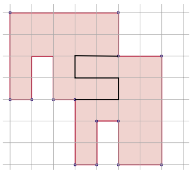
**36.** *Ствол одного дерева распилили на несколько частей, а потом ствол другого дерева распилили за вдвое большее время на другое число частей. Докажите, что во втором случае число частей нечётно. (На каждый распил тратили одно и то же время.)*

Во втором случае было вдвое больше распилов, то есть чётное число. А частей на 1 больше, чем распилов, то есть нечётное число.

**37.** *Можно ли из 1000 чисел 1, 1/2, 1/3, ..., 1/1000 выбрать 8 чисел и записать их в ряд так, чтобы разности между соседними числами были одинаковы?*

**Ответ:** да. Возьмём наименьшее число, делящееся на все числа от 1 до 8 (наименьшее общее кратное чисел 1, ..., 8). Это 840 и оно меньше 1000. Поэтому набор 1/840, 2/840, 3/840, ..., 8/840 подходит – это числа 1/840, 1/420, 1/280, 1/210, 1/168, 1/140, 1/120 и 1/105.

**38.** *Разделите данную фигуру на две равные части.*



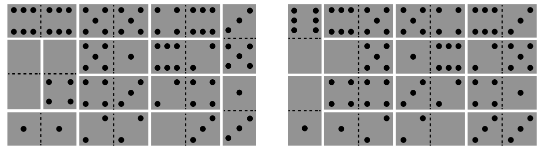
**Ответ:** разрез показан на рисунке из условия чёрной линией.

**39.** *У Кости было 26 одинаковых на вид монет, среди них 21 – настоящие, которые весят поровну, и 5 – фальшивые, которые тоже весят поровну, но несколько легче. Все вместе они весили 421 г. Костя потерял 5 монет, и теперь оставшиеся весят только 340 г. Сколько весит настоящая монета?*

**Ответ:** 16,2 грамма. Заметим, что средняя масса оставшихся монет, равная 340/21, меньше, чем средняя масса потерянных монет, равная $(421-340)/5=81/5$. Допустим, что среди потерянных монет есть хотя бы одна фальшивая. Тогда доля фальшивых монет среди потерянных – хотя бы 1/5, а среди оставшихся – не более 4/21, что меньше 1/5. Но в таком случае средняя масса оставшихся монет была бы больше средней массы потерянных. Поэтому все потерянные монеты – настоящие, и одна монета весит $(421-340)/5=16{,}2$ грамма.

**40.** *Костяшка домино имеет вид прямоугольника $1\times2$, разделённого на два квадратика $1\times1$, на каждом квадратике выбито от 0 до 6 очков. В полном наборе домино 28 неповторяющихся костяшек. Можно ли уложить их все в коробку $4\times7$ в два слоя так, чтобы каждые два квадратика, находящиеся на одном и том же месте в разных слоях, содержали одинаковое число очков?*

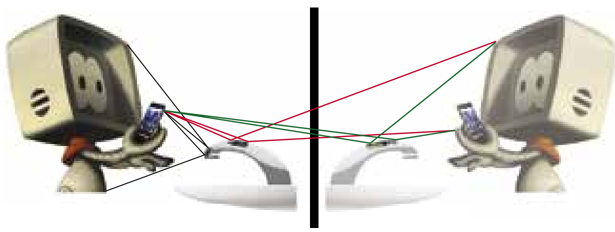
**Ответ:** да. Пример приведён на рисунке.



## ОТРАЖЕНИЯ В КРАНЕ
**(«Квантик» № 5, 2019)**

Маленькое изображение – реальное отражение автора в кране. Маленькое оно потому, что кран короткий и автор стоял рядом с концом крана почти перпендикулярно ему. А большое изображение в кране получилось после отражения от вертикального зеркала, которого на фотографии не было видно. Можно считать, что второе отражение – это отражение в кране зазеркального двойника автора, расположенного по другую сторону от зеркала.

На одной фотографии можно получить целых три отражения (см. фото): отражение автора в кране, отражение зазеркального двойника в кране и отражение зазеркального двойника в отражении крана (см. схему лучей на рисунке).



## В НАЧАЛЕ БЫЛО СЛОВО ...

*Подсказки*

**1.** В любых треугольниках?

**2.** Какие именно углы равны?

**3.** Пусть один треугольник – остроугольный, а другой – тупоугольный.

**4.** О каком количестве точек идёт речь?
**5.** Хорда окружности стягивает две дуги.
**6.** Сколько общих касательных может быть у двух окружностей?
**7.** Рассмотрите по отдельности каждый вид треугольника (по углам).
**8.** Соедините, например, середины основания и боковой стороны.
**9.** Четырёхугольники бывают невыпуклыми.
**10.** Рассмотрите по отдельности каждый вид треугольника (по углам).
**11.** Любая медиана?
**12.** Рассмотрите точку на луче, дополнительном к биссектрисе.
**13.** Можно ли выбрать любую высоту?
**14.** Сколько равных наклонных можно провести к прямой?
**15.** Сколько радиусов можно провести в окружности?
**16.** Будет ли хордой окружности её диаметр?
**17.** А квадрат является параллелограммом?

*Ответы*

**1.** В **равных** треугольниках напротив равных сторон лежат равные углы.

**2.** Если катет и прилежащий к нему **острый** угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

**3.** Если две стороны и высота, проведённая к третьей стороне одного **остроугольного** треугольника, соответственно равны двум сторонам и высоте, проведённой к третьей стороне другого **остроугольного** треугольника, то такие треугольники равны.

**4.** **Все** точки плоскости, удалённые на данное ненулевое расстояние от заданной точки $O$, образуют окружность с центром $O$.

**5.** Равные хорды окружности стягивают равные **меньшие (бóльшие)** дуги.

**6.** Две общие **внешние (внутренние)** касательные к двум неравным окружностям пересекаются на прямой, содержащей их центры.

**7.** Наименьший диаметр окружности, внутри которой можно поместить данный **остроугольный (прямоугольный)** треугольник, – это диаметр окружности, описанной около треугольника.

**8.** Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины её **боковых** сторон.

**9.** Если все стороны и диагональ одного **выпуклого** четырёхугольника соответственно равны сторонам и диагонали другого **выпуклого** четырёхугольника, то равны и другие их диагонали.

**10.** Середины трёх высот **непрямоугольного** треугольника не лежат на одной прямой.

**11.** В равнобедренном треугольнике медиана, **проведённая к основанию**, является биссектрисой и высотой.

**12.** Если точка, **лежащая внутри угла**, равноудалена от сторон угла, то она лежит на биссектрисе этого угла.

**13.** Площадь треугольника равна половине произведения стороны и высоты, **проведённой к ней.**

**14.** Равным наклонным к прямой, **проведённым из одной точки**, соответствуют равные проекции.

**15.** Касательная к окружности перпендикулярна её радиусу, **проведённому в точку касания.**

**16.** Диаметр окружности, проходящий через середину хорды, **не являющейся диаметром**, перпендикулярен ей.

**17.** Параллелограмм, **отличный от прямоугольника и ромба**, не имеет оси симметрии.

## ГОВОРЯТ ДЕТИ

**1.** Маша хотела сказать что-то вроде «Чипи-Дэйла». Иными словами, она просила, чтобы ей дали снова посмотреть знаменитый диснеевский сериал **«Чип и Дэйл спешат на помощь»**.

**2.** Вместо *надувать щёки* маленький Лёва говорит (вполне естественно) *делать большие щёки*. А во «взрослом» русском языке есть выражение ***делать большие глаза*** «разыгрывать крайнее удивление».

**3.** Город называется **Вифлеем**: согласно Евангелиям, это город, в котором родился Иисус Христос. Света в шутку переделала это название в «Вафли ем».

**4.** Прозвище *Золушка* образовано от слова *зола* и буквально означает что-то вроде «замарашка». Но маленькая внучка, конечно, рассуждала совсем иначе: «Меня зовут Золушка, – отвечала она бабушке-Принцу, – потому что я приехала сюда **в золотой карете**».

## ЛУНОХОД

**а) Ответ:** может.

Отметим на планете полюса $N$ и $S$, и пусть точки $A$, $B$, $C$ и $D$ делят соответствующий экватор на четыре равных дуги, как на рисунке 1.

Рассмотрим замкнутый путь $A \to B \to S \to D \to C \to$ $\to N \to A$ по поверхности, состоящий из дуг больших окружностей с центрами в центре планеты. Этот путь состоит из 6 одинаковых дуг длиной в 1/4 экватора, поэтому длина пути составляет 600 км.

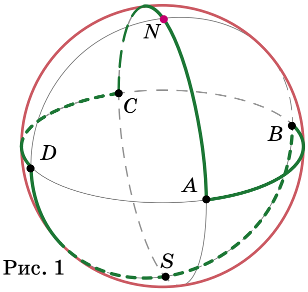


Рис. 1

Покажем, что луноход побывал на расстоянии не более 50 км от каждой точки. Поверхность планеты разобьём на 8 одинаковых сферических треугольников с вершинами в отмеченных точках. Луноход побывал во всех вершинах и во всех точках хотя бы одной стороны каждого треугольника.

Так как расстояние по поверхности от полюса до экватора 100 км, то поверхность планеты разбивается на экваториальный пояс – точки, удалённые от экватора на расстояние не более 50 км, – и две полярные шапки – точки, удалённые от полюсов на расстояние не более 50 км. На рисунке зелёная часть треугольника исследована луноходом, так как он проехал вдоль стороны, а красная исследована, так как он побывал в вершине.

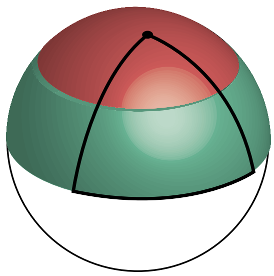


Рис. 2

**б) Ответ:** может.

Снова разобьём поверхность планеты на 8 равных треугольников. *Средней параллелью* треугольника назовём часть линии, параллельной стороне треугольника и соединяющей середины двух других сторон. На рисунке 2 средняя параллель треугольника лежит на границе красной и зелёной областей.

Пусть луноход прошёл по средним параллелям всех треугольников, как на рисунке 3.

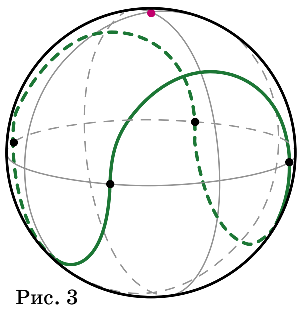


Рис. 3

Вся поверхность планеты будет исследована, потому что любая точка треугольника находится на расстоянии не более 50 км от некоторой точки средней параллели, что видно из рисунка 2.

Наконец, докажем, что длина окружности, на которой лежит средняя параллель, в $\sqrt{2}$ раз меньше длины экватора. Из этого будет следовать, что длина пути равна $\frac{800}{\sqrt{2}}$, что примерно равно 566.

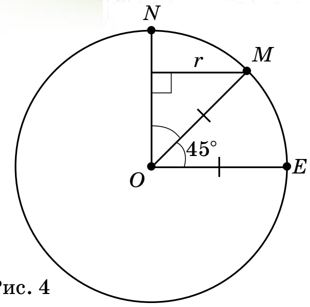


Рис. 4

Пусть $N$ и $E$ – вершины треугольника, $O$ – центр планеты. Радиус окружности, на которой лежит средняя параллель, равен расстоянию $r$ от середины $M$ дуги $NE$ до прямой $ON$. Из рисунка 4 видно, что $r = \frac{OE}{\sqrt{2}}$. Значит, радиус меньшей окружности в $\sqrt{2}$ меньше радиуса планеты, что и требовалось.

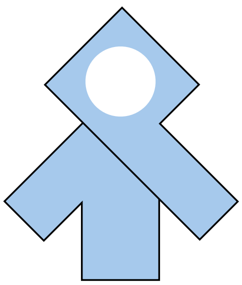
Интересно было бы узнать, какова наименьшая возможная длина такого пути. Можно доказать (правда, не совсем элементарно), что она заведомо больше 500.

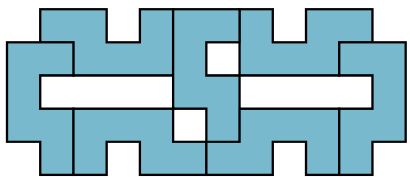
## СЧЁТ ДВАДЦАТКАМИ

**а)** Поскольку числа 31 и 35 Лёва называет правильно, само слово «тридцать» у него не вызывает затруднений. Как читается 0, он тоже знает. Видимо, Лёва руководствуется такой аналогией: если 35 – «тридцать пять», 31 – «тридцать один», то **30 – «тридцать ноль»**.

**б)** Поскольку число 31 Лёва называет без ошибок, «один» в 51 он наверняка тоже называет правильно. Тогда ошибка кроется в слове «пятьдесят». Видимо, Лёва и тут использует аналогию: поскольку 2 и 3 («два» и «три») в начале двузначного числа читаются как «двадцать» и «три-дцать», то и 5 («пять») в начале двузначного числа «должно» читаться как... «пять-дцать». Тем самым, **51 – «пятьдцать один»**.

## ДВА СИММЕТРИКСА


Уол (по-якутски *мальчик, сын*)


«7 вопросов»

## LXXXV САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

**1. Ответ:** да, можно. Один из возможных примеров изображён на рисунке.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | –1 | 1 | 1 |
| 1 | 5 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 7 | 1 |
| 1 | 1 | –1 | 2019 |

**2. Ответ:** 0, 2, 4, 6 или 8 рыцарей

Пусть в ряду стоят $n > 8$ рыцарей. Тогда у самого левого из них разность между числом рыцарей справа и слева от него равна $n-1$, у второго слева равна $n-3$, у третьего слева равна $n - 5$. Все эти числа имеют разные остатки при делении на 3, поэтому одно из них делится на 3 и при этом больше 3, если $n > 8$, следовательно, не простенькое. Значит, этот случай невозможен.

А ещё количество рыцарей не может быть нечётным, так как в этом случае разность между количествами рыцарей справа и слева от любого рыцаря чётна, а чётные числа не простенькие.

Покажем, что рыцарей могло быть любое чётное число от 0 до 8. Действительно, поставим всех рыцарей подряд в левый конец ряда, то есть так, чтобы любой рыцарь находился левее любого лжеца. Тогда разность между количеством рыцарей справа и слева от любого рыцаря будет равняться 1, 3, 5 или 7 – все эти числа являются простенькими. А для любого лжеца эта разность равна 8, то есть не простенькая.

**3. Ответ:** миллион.

Сложим отдельно все выписанные единицы, все выписанные двойки и т. д.

Рассмотрим любое $n$, где $1 \leqslant n \leqslant 1000$. Оно является делителем чисел $n$, $2n$, $3n$, ..., $kn$, где $kn$ – самое большое число, не превосходящее 1000 и делящееся на $n$. Значит, $k = \left[\frac{1000}{n}\right]$ и $n$ выписано $\left[\frac{1000}{n}\right]$ раз. Тогда сумма всех выписанных экземпляров числа $n$ равна $n \cdot \left[\frac{1000}{n}\right] \leqslant$ $\leqslant 1000$ (здесь $[x]$ – это целая часть $x$).

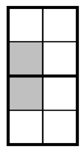
Всего мы подсчитали 1000 сумм и каждая не превосходит 1000. Но многие из сумм меньше 1000; например, число $n = 3$ выписано 333 раза и даёт вклад 999 в общую сумму. Значит, итоговая сумма всех чисел меньше миллиона.

**4.** Рассматриваемый промежуток времени из 2019 недель будем называть *годом*. Пусть министр попробует сделать выходными все понедельники, вторники, среды и четверги. Тогда в каждой неделе будет 4 выходных и максимум 13 дней, то есть доля выходных не меньше $\frac{4}{13} > \frac{2}{7}$. Если при этом за год доля числа выходных окажется не больше половины, то всё получилось.

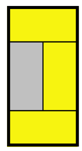
В противном случае понедельники, вторники, среды и четверги составляют в сумме больше половины всех дней в году. Но тогда суммарное количество пятниц, суббот и воскресений меньше половины. Сделаем выходными их! В этом случае каждая неделя содержит не менее 7 дней, ровно 4 дня из которых рабочие. То есть рабочие дни составляют не более $\frac{4}{7}$ каждой недели, а тогда выходных даже не меньше $\frac{3}{7}$.

**5.** Приведём стратегию для второго игрока. Сначала он мысленно разбивает зал на квадратики $2 \times 2$ (будем называть их *блоки*) и потом каждый раз ходит так, чтобы после его хода в каждом блоке все клетки были покрыты матами одинаковое число раз.

Докажем, что второй игрок всегда сможет сделать ход по этой стратегии. Если первый игрок положил мат, пересекающий два блока, то второй кладёт свои маты так, чтобы они покрыли остальные клетки этих двух блоков ровно по одному разу (см. пример на рисунке). Очевидно, что если первый игрок мог положить мат на эти блоки, то и второй может, так как до этого хода клетки каждого блока были покрыты одинаковое число раз.



Ход первого игрока



Ответ второго игрока

Если же первый игрок положил свой мат только на один блок, то второй кладёт один свой мат на две другие клетки того же блока (очевидно, это можно сделать). А также двумя другими матами второй игрок покрывает в один слой произвольный блок, покрытый не более четырёх раз. Покажем, что такой блок обязательно найдётся. Действительно, иначе все блоки уже покрыты в 5 слоёв, то есть всего положено $\frac{5 \cdot 100 \cdot 100}{2}$ матов. Это число делится на 4, что невозможно, так как за каждую пару ходов игроки кладут по 4 мата и ещё два мата положены за ход первого и часть хода второго.

Таким образом, второй игрок всегда может сделать ход, а значит, не проиграет.

**6. Ответ:** 40.

*Оценка.* Предположим, что какой-то человек (назовём его Костей) знаком хотя бы с 20 людьми. Если какие-то из Костиных знакомых знакомы между собой, то Костя общительный. Разберём случай, когда все Костины знакомые незнакомы друг с другом. В этом случае, если Костя знаком хотя бы с 21 человеком, то любой из его знакомых стеснительный.

Аналогично, если Костя незнаком с 20 людьми, среди которых есть незнакомые между собой, то Костя стеснительный. А в случае, когда Костя незнаком с 21 человеком, и при этом все, кто незнаком с Костей, между собой знакомы, то все они общительные.

Значит, если в компании хотя бы 41 человек, то Костя знаком ровно с 20 людьми и ровно с 20 людьми незнаком. При этом все знакомые Кости незнакомы друг с другом, а все незнакомые с Костей – знакомы друг с другом. Рассмотрим любого человека, знакомого с Костей, скажем, Васю и любого человека, незнакомого с Костей, скажем, Петю. Если Вася и Петя знакомы, то Петя общительный, так как он знаком с Васей и ещё с 19 людьми, незнакомыми с Костей, при этом те, кто незнаком с Костей, знакомы друг с другом. Аналогично, если Вася и Петя незнакомы, то Вася стеснительный.

*Пример.* Поделим компанию из 40 человек на две группы по 20 человек. Пусть люди из одной группы знакомы друг с другом, а люди из разных групп незнакомы. Тогда если бы нашёлся какой-то общительный человек, то все его знакомые находились бы с ним в одной группе, а тогда в этой группе был бы хотя бы 21 человек. Если же нашёлся стеснительный человек, то все люди, незнакомые с ним, находились бы в одной группе, а значит, были бы знакомы друг с другом.

**7.** Заметим, что если Саша выбрал два одинаковых числа (например, $x$ и $y$), то он написал две дроби, равные 1 $\left(\text{это } \frac{x}{y} \text{ и } \frac{y}{x}\right)$, и тогда утверждение задачи очевидно. Значит, можно считать, что все Сашины числа различны. Пусть $x<y<z<t$. Тогда Саша выписал ровно 6 дробей, которые меньше 1, это дроби $\frac{x}{y}, \frac{x}{z}, \frac{x}{t}, \frac{y}{z}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$.

а) После этого наблюдения утверждение пункта а) очевидно: среди любых 6 чисел от 0 до 1 можно выбрать два, разность которых не превосходит $\frac{1}{5}$. Действительно, если бы разность любых двух чисел была бы больше $\frac{1}{5}$, то на каждом из 5 отрезков $\left[0, \frac{1}{5}\right]$, $\left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right]$, $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$, $\left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]$, $\left[\frac{4}{5}, 1\right]$ находилось бы не больше одного числа, то есть количество чисел было бы не больше 5.

б) Выпишем Сашины дроби в порядке возрастания: $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{12}$. Тогда дроби $q_1, q_2, \ldots, q_6$ меньше 1, а $q_7$ – самая маленькая из дробей, превосходящих 1. Нетрудно догадаться, что $q_7=\frac{1}{q_6}$, $q_8=\frac{1}{q_5}$ и т.д.

Предположим, что любые две дроби отличаются хотя бы на $d=\frac{11}{60}$. Тогда $q_1>0$, $q_2>q_1+d>d$, $\ldots, q_6>q_5+d>5d$, $q_7>q_6+d>6d$. Следовательно, $1=q_6q_7>5d\cdot 6d=5\cdot 6\cdot\left(\frac{11}{60}\right)^2=\frac{121}{120}$. Противоречие.

в) Проверим, что найдутся две дроби, которые отличаются не больше чем на $\frac{2}{13}$. Так как $\frac{2}{13}<\frac{1}{6}$, мы докажем более сильное утверждение.

Очевидно, $\frac{x}{t}$ – самая маленькая дробь. Пусть все дроби отличаются более чем на $\frac{2}{13}$, тогда $\frac{x}{t}<\frac{3}{13}$, потому что иначе наши 6 дробей распределены по пяти отрезкам $\left[\frac{3}{13}, \frac{5}{13}\right]$, $\left[\frac{5}{13}, \frac{7}{13}\right]$, $\left[\frac{7}{13}, \frac{9}{13}\right]$, $\left[\frac{9}{13}, \frac{11}{13}\right]$, $\left[\frac{11}{13}, 1\right]$, и какие-то две дроби различаются не более чем на $\frac{2}{13}$, противоречие.

Заметим, что для $a$ из $\left[0, \frac{3}{13}\right]$ выполняется неравенство $a+\frac{2}{13}>\frac{5}{3}\cdot a$. Поэтому $\frac{x}{y}\geqslant\frac{x}{t}+\frac{2}{13}>\frac{5}{3}\cdot\frac{x}{t}$ и аналогично $\frac{x}{z}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ больше, чем $\frac{5}{3}\cdot\frac{x}{t}$.

Далее, заметим, что $\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{t}=\frac{x}{t}$. При этом $\frac{x}{y}>\frac{5}{3}\cdot\frac{x}{t}$. Следовательно, $\frac{y}{t}<\frac{3}{5}$ и аналогично $\frac{x}{y}<\frac{3}{5}$. Точно так же, рассматривая произведение $\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{t}=\frac{x}{t}$, заключаем, что $\frac{x}{z}<\frac{3}{5}$, $\frac{z}{t}<\frac{3}{5}$.

Итак, среди наших дробей 5 чисел – $\frac{x}{y}, \frac{x}{z}, \frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ – не превосходят $\frac{3}{5}$. Как и в пункте а) это значит, что разность каких-то двух из них не превосходит $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{20}<\frac{2}{13}$. Противоречие.