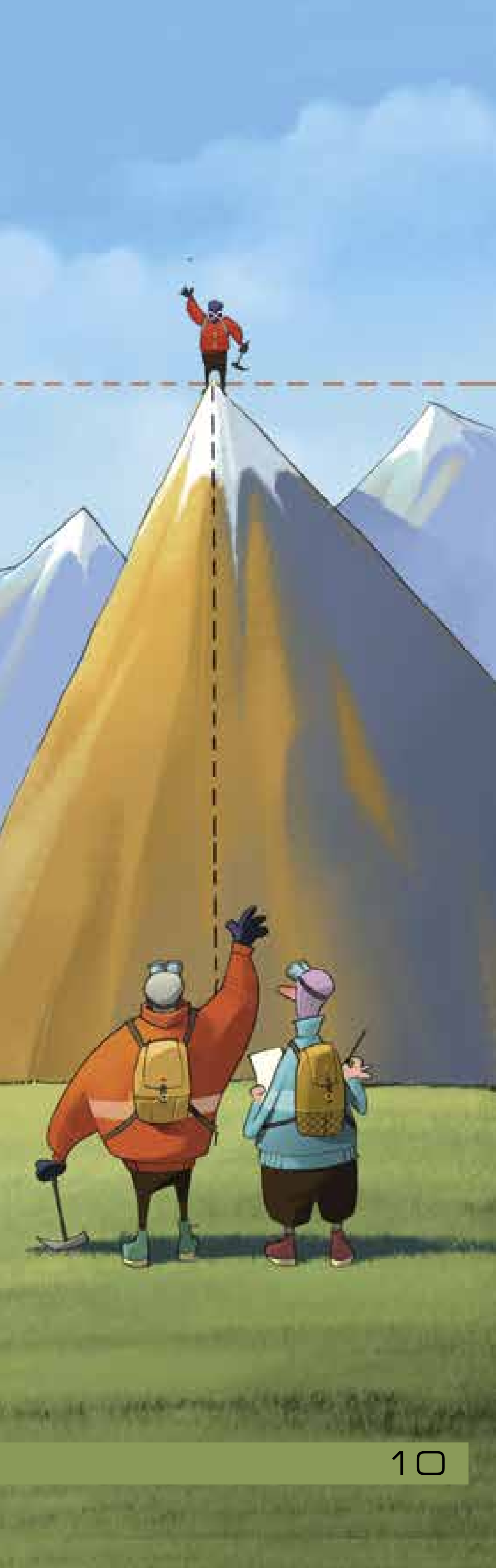
Егор Бакаев

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА



Мы покажем, как можно находить площадь треугольника, и предложим вам подумать над задачами, где потребуется это умение применить. Как обычно, к некоторым задачам указания или решения даны сразу после их условий, а к некоторым – в конце журнала.

Рассмотрим сначала треугольники, расположенные на квадратной сетке.

Задача 1. Найдите площади четырёх треугольников, изображённых на рисунке 1.

Ниже приводится решение, но сначала попробуйте решить задачу самостоятельно.

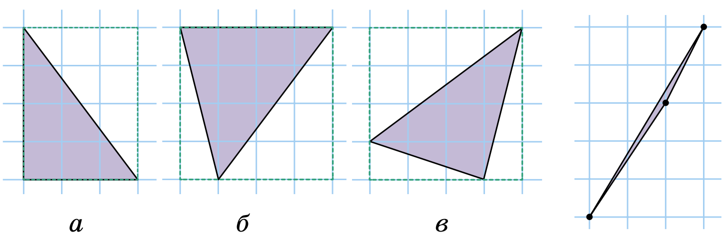


Рис. 1 *а* *б* *в* *г*

а) Этот треугольник – половина прямоугольника (рис. 2, *а*). Значит, нужно найти площадь прямоугольника и поделить её пополам. А чтобы её найти, надо перемножить его стороны. Ответ: $\frac{3\cdot4}{2}=6$.

б) Проведём в треугольнике высоту (рис. 2, *б*). Она делит его на два прямоугольных треугольника. Их площади найдём как в пункте а). Ответ: $\frac{1\cdot4}{2}+\frac{3\cdot4}{2}=8$.

в) Здесь такое решение, как в пункте б), не сработает, потому что ни одна высота треугольника не идёт по линии сетки. Поступим по-другому: достроим треугольник до прямоугольника и найдём площади достроенных прямоугольных треугольников (рис. 2, *в*). Затем из площади прямоугольника вычтем площади добавленных частей. Ответ: $4\cdot4-\frac{3\cdot4}{2}-\frac{3\cdot1}{2}-\frac{1\cdot4}{2}=6{,}5$.

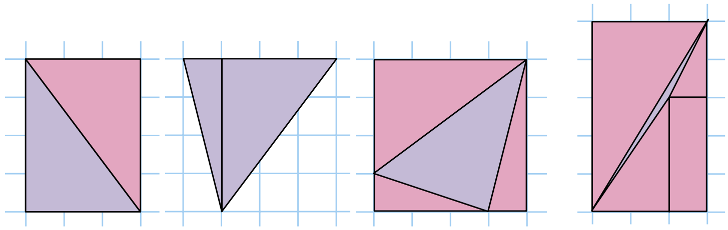


Рис. 2 *а* *б* *в* *г*

г) Снова достроим треугольник до прямоугольника. Добавленная область разрезается на прямоугольник и три прямоугольных треугольника (рис. 2,*г*). Ответ: $3\cdot5-3-\frac{3\cdot5}{2}-\frac{2\cdot3}{2}-\frac{1\cdot2}{2}=0{,}5$.

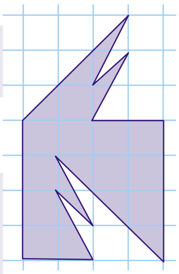


Рис. 3

Задача 2. Найдите площадь многоугольника, изображённого на рис. 3.

Попробуйте решить задачу без скучных подсчётов. Такое решение есть!

Задача 3. Квадрат на рисунке 4 разрезан на восемь треугольников. Какие из них самые большие по площади?

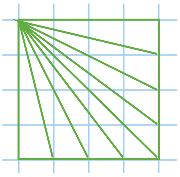


Рис. 4

Сначала можно найти площади прямоугольных треугольников. Теперь можно найти площадь соседних с ними, как в решении задачи 1…

Задача 4. Если одну клетку разрезать по диагонали, получится треугольник площадью $\frac{1}{2}$. У треугольника на рисунке 1,*г* площадь тоже $\frac{1}{2}$. А сколько всего различных треугольников с вершинами в узлах сетки и площадью $\frac{1}{2}$?

Заметьте, что не нужно находить *все* такие треугольники – в задаче спрашивается, сколько их.

Задача 5. Нарисуйте шестиугольник с вершинами в узлах сетки, у которого все стороны длиннее 4, а площадь не больше 2.

В любом шестиугольнике можно провести диагонали так, чтобы он распался на 4 треугольника. Видимо, эти треугольники должны быть длинными, но маленькими по площади…

Задача 6*. Докажите, что площадь многоугольника с вершинами в узлах сетки всегда является целым числом или целым числом, делённым на 2. (В частности, треугольников площадью меньше $\frac{1}{2}$ не бывает.)

На этом закончим изучение фигур на квадратной сетке и рассмотрим произвольный треугольник, не обязательно с вершинами в узлах. Его площадь можно найти по формуле $S=\frac{1}{2}ah$, где a – длина стороны треугольника, а h – длина высоты, проведённой к этой стороне.

Доказательство формулы похоже на решения пунктов а) и б) задачи 1. Для начала вспомним, что пло-

Художник Алексей Вайнер

щадь произвольного (не обязательно клетчатого) прямоугольника равна произведению длин его сторон.

Отсюда сразу следует справедливость формулы, если высота h треугольника совпадает с одной из его сторон (рис. 5,*а*): ведь тогда наш треугольник – половина прямоугольника со сторонами h и a.

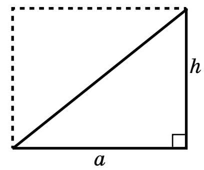


Рис. 5,*а*

Если же высота h лежит внутри (рис. 5, *б*) или снаружи (рис. 5, *в*) треугольника, то его площадь получается соответственно как сумма или как разность площадей двух прямоугольных треугольников с основанием b (выделен красным) и основанием c (выделен синим), для которых формула верна. В первом случае $a = b + c$ и $S = \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}ah$, а во втором $a = b - c$ и $S = \frac{1}{2}bh - \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}ah$.

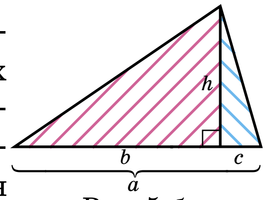


Рис. 5,*б*

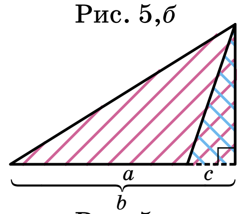


Рис. 5,*в*

Итак, формула доказана!

Заметим, что с помощью формулы можно дать такое решение задачи 3: у всех этих треугольников есть сторона, равная 1, а высота, проведённая к ним, равна 4 (она проходит по стороне квадрата). Поэтому площадь каждого из них равна $\frac{4 \cdot 1}{2} = 2$.

Задача 7. Докажите, что медиана треугольника делит его на два треугольника одинаковой площади (рис. 6).

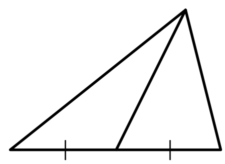


Рис. 6

Здесь можно применить формулу площади треугольника. Для этого надо сначала провести высоту.

Задача 8*. На сторонах треугольника построили квадраты и соединили их вершины, как на рисунке 7. Докажите, что у четырёх закрашенных треугольников одинаковая площадь.

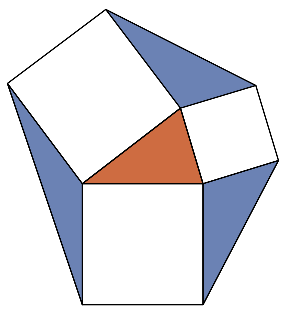


Рис. 7

Хоть здесь и не видно медиан, но в решении этой задачи помогает предыдущая!