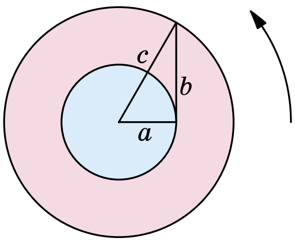
Григорий Мерзон

ПИФАГОР НА ВЕЛОСИПЕДЕ

Теорема Пифагора и площадь кольца

Наверняка вы знаете несколько доказательств теоремы Пифагора. Обсудим ещё одно.

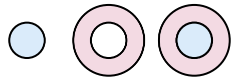


Возьмём прямоугольный треугольник и будем вращать его (в плоскости треугольника) вокруг вершины острого угла.

Какую площадь при этом «заметает» треугольник? С одной стороны, ясно, что это просто площадь круга, радиусом которого является гипотенуза, πc^2.

С другой стороны, этот круг состоит из частей, заметаемых двумя катетами. С одной из этих частей всё понятно: это круг, его площадь равна πa^2. Осталось доказать, что площадь второй части, кольца, равна πb^2, и теорема Пифагора доказана:

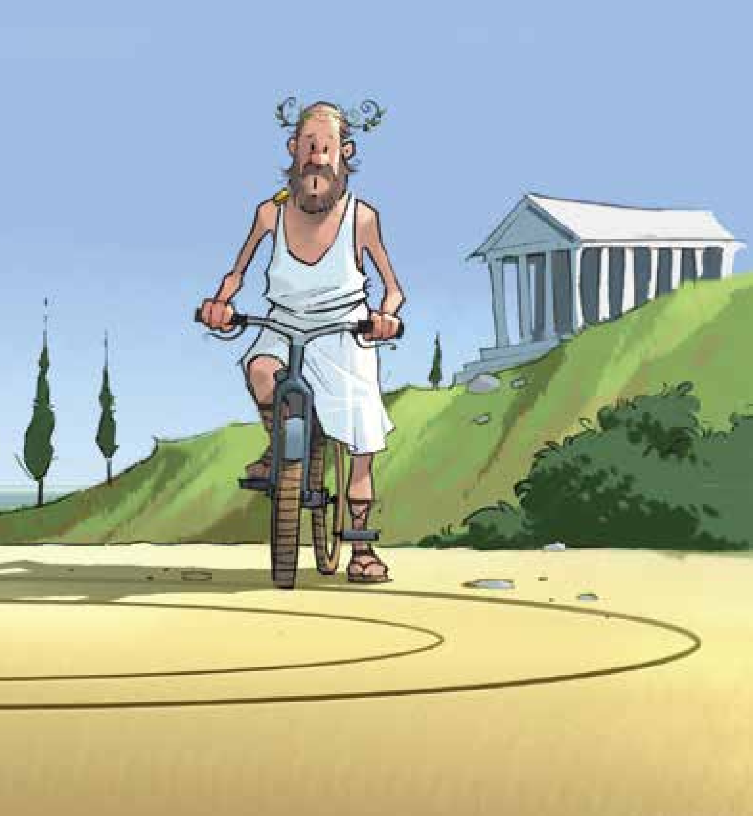
$$\pi a^2 + \pi b^2 = \pi c^2$$



Утверждение про площадь кольца выглядит довольно неожиданно: если увеличивать катет a (не меняя катета b), то, расширяясь, кольцо становится всё тоньше и тоньше – но его площадь не меняется. Вот одно из следствий.

Задача. Персик представляет собой шар, внутри которого находится косточка – ещё один шар с тем же центром. Докажите, что все сечения персика, задевающие косточку, имеют одну и ту же площадь.

О замечательных следствиях этой задачи мы поговорим в другой раз. А сейчас вернёмся к утверждению про площадь кольца.



Велосипедная теорема Мамикона

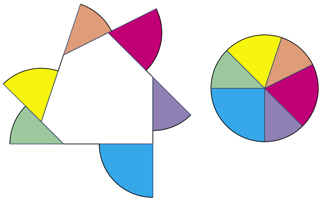
Представим себе, что катет b – это... *рама велосипеда*. Велосипед едет по кругу: его заднее колесо катится без проскальзывания по окружности радиуса a, переднее колесо – по окружности радиуса c.

Оказывается, что нужное нам утверждение о площади кольца – это частный случай следующей замечательной теоремы.

Если велосипед[1] *с рамой длины* b *проехал так, что следы и от переднего, и от заднего колеса образуют замкнутые кривые, то заключённая между ними площадь*[2] *не зависит от траектории велосипеда и равна* πb^2.

Строгое доказательство этой теоремы потребовало бы использования математического анализа. Но чтобы понять, в чём тут дело, разберёмся со случаем, когда заднее колесо велосипеда движется не по произвольной кривой, а по замкнутой ломаной.

Пока заднее колесо движется по одному из звеньев, переднее тоже движется по прямой; а когда заднее доезжает до конца звена – оно останавливается, а переднее колесо поворачивает по дуге окружности.



Интересующая нас площадь – это сумма площадей секторов. Радиус каждого из них – длина рамы велосипеда. А так как направление велосипеда делает в итоге полный оборот, заштрихованные секторы складываются в полный круг. То есть интересующая нас площадь действительно равна πb^2.

В заключение этого доказательства – **вопрос**. В велосипедной теореме речь шла о движении на плоскости. А что будет, если велосипедист совершил столь большое путешествие, что траекторию уже нельзя считать плоской, а только нарисованной на сфере: будет ли заметаемая рама площадь по-прежнему равна площади круга радиуса b? Будет больше? Меньше?

[1] Велосипед должен быть идеально-математическим: мы считаем, что его толщина нулевая, а главное, что он едет без проскальзывания. Последнее означает, в частности, что в каждый момент рама направлена по касательной к траектории заднего колеса.

[2] Можно для простоты считать, что эти кривые не имеют самопересечений и не пересекаются друг с другом.

Художник Алексей Вайнер