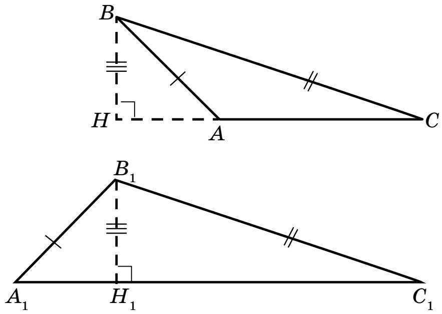
НАШ КОНКУРС, X ТУР
(«Квантик» № 6, 2019)

46. *Саша придумал признак равенства тупоугольных треугольников: «Если две стороны и высота, проведённая к третьей стороне одного тупоугольного треугольника, соответственно равны двум сторонам и высоте, проведённой к третьей стороне другого тупоугольного треугольника, то такие треугольники равны». Не ошибается ли Саша?*

Ответ: ошибается. Тупоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ на рисунке ниже различны, но удовлетворяют условию.

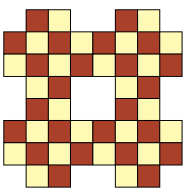


42. *Квантик выписал в порядке возрастания все 9-значные числа, в записи каждого из которых участвуют по одному разу все ненулевые цифры от 1 до 9: начиная от 123456789 и кончая 987654321. Затем Квантик выписал все положительные разности соседних чисел этой цепочки и нашёл общую сумму этих разностей. Докажите, что в итоге Квантик получил одно из чисел исходной цепочки 9-значных чисел. Какое именно?*

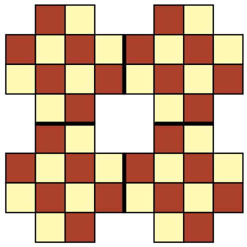
Ответ: 864197532. Обозначим 9-значные числа исходной цепочки через a, b, c, d, …, x, y, z, где $a=123456789$ и $z=987654321$. Тогда сумма чисел Квантика равна
$(b-a)+(c-b)+(d-c)+\ldots+(y-x)+(z-y)=z-a=$
$=987654321-123456789=864197532.$

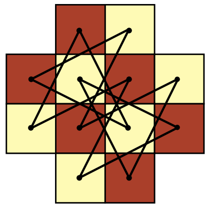
Это действительно одно из чисел исходной цепочки!

43. *Проложите замкнутый маршрут шахматного коня, проходящий по одному разу по всем клеткам изображённой на рисунке справа фигурной доски.*

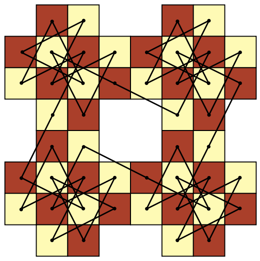


Заметим, что данная фигурная доска состоит из четырёх двенадцатиклеточных досок, по которым можно проложить маршрут шахматного коня:





Остаётся удалить по одному звену в маршруте шахматного коня на каждой из четырёх малых досок и объединить их в один маршрут коня по всем клеткам данной фигурной доски:



44. *Факториалом натурального числа n называется произведение всех целых чисел от 1 до n, то есть $1\cdot2\cdot\ldots\cdot n$. Обозначение: n! (читается «эн факториал»). Существует ли такое n, что n! равно*

а) произведению двух факториалов различных натуральных чисел, больших 1;

б) произведению 2019 факториалов натуральных чисел, которые все различны?

Ответ: а) да; б) да. Пусть $n=3!=6$. Тогда $6!=5!\cdot6=5!\cdot3!$, и мы получаем решение пункта а). Аналогично, применяя такую конструкцию много раз, получим решение пункта б): $(6!)!=720!=719!\cdot6!=719!\cdot5!\cdot3!$, далее $(720!)!=(720!-1)!\cdot719!\cdot5!\cdot3!$, и т. д.

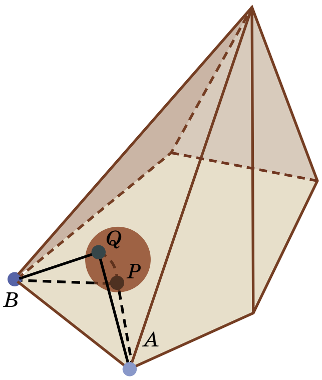
45. *У каждого из 100 друзей есть ровно 10 интересов, и у каждых двоих из них ровно 1 общий интерес. Докажите, что у всех 100 друзей есть общий интерес.*

Возьмём одного из друзей, скажем Петю. У него 99 друзей и 10 интересов. По принципу Дирихле какой-то интерес, скажем хоккей, будет общим у Пети хотя бы с 10 друзьями. Тогда хоккеем увлекается хотя бы 11 человек, включая Петю. Предположим, что нашёлся друг, скажем Вася, который хоккеем не увлекается. Тогда с каждым из хоккеистов у Васи есть какой-то общий интерес. Всего у Васи 10 интересов, а хоккеистов хотя бы 11. Тогда найдутся два хоккеиста, которые имеют с Васей один и тот же интерес. Но у этих двоих уже есть общий интерес – хоккей, и они не могут иметь второй общий интерес. Значит, такого Васи быть не может, и хоккеем увлекаются все 100 друзей.

ЦВЕТОК-ПИРАМИДКА

(«Квантик» № 7, 2019)

Пылинку всегда удастся накрыть каким-то лепестком. Чтобы найти этот лепесток, Квантик придумал такой способ. Поместим внутри пирамиды маленький воздушный шарик, чтобы он касался основания в точке P, где лежит пылинка. Будем раздувать шарик, пока он не коснётся какого-то лепестка в некой точке Q (см. рисунок ниже). Докажем, что этот лепесток и накроет пылинку. Точка Q лежит строго внутри лепестка, а не на его границе, так как пирамида выпуклая. Тогда отрезки AP и AQ – касательные к шарику, а потому равны. Аналогично, равны касательные BP и BQ. Но тогда треугольники AQB и APB равны по трём сторонам, и, поворачивая лепесток вокруг ребра AB, мы в итоге совместим эти треугольники, то есть точка Q накроет точку P.



ВНУТРИ АТОМНОГО ЯДРА: СИЛЬНОЕ И СЛАБОЕ

1. Размер атома в этой модели
$(10^{-10} : 10^{-15}) \cdot 1$ мм $= 10^5$ мм $= 100$ м.
Размер вируса
$(10^{-7} : 10^{-15}) \cdot 1$ мм $= 10^8$ мм $= 100$ км.

2. Вверху слева – массовое число, то есть число нуклонов (протоны + нейтроны) в ядре, внизу слева – заряд ядра, то есть число протонов.

3. ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra} \to {}^{222}_{86}\mathrm{Rn} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$.

4. ${}^{3}_{1}\mathrm{H} \to {}^{3}_{2}\mathrm{He} + e^- + \bar{\nu}$.

5. ${}^{59}_{28}\mathrm{Ni} + e^- \to {}^{59}_{27}\mathrm{Co} + \nu$.

6. ${}^{15}_{7}\mathrm{N}$, ${}^{11}_{5}\mathrm{B}$, ${}^{121}_{52}\mathrm{Te}$. Например, ${}^{15}_{8}\mathrm{O} \to {}^{15}_{7}\mathrm{N} + e^+ + \nu$.

Контрольная задача

${}^{40}_{19}\mathrm{K} \to {}^{40}_{20}\mathrm{Ca} + e^- + \bar{\nu}$; бета-распад.

${}^{235}_{93}\mathrm{Np} + e^- \to {}^{235}_{92}\mathrm{U} + \nu$; электронный захват (нептуний – элемент, названный в честь планеты Нептун).

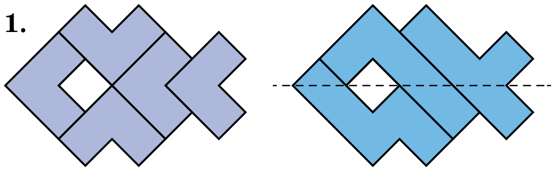
${}^{235}_{92}\mathrm{U} \to {}^{210}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{25}_{10}\mathrm{Ne}$; кластерный распад (распад на две большие части).

${}^{13}_{7}\mathrm{N} \to {}^{13}_{6}\mathrm{C} + e^+ + \nu$; бета-плюс распад (позитронный распад).

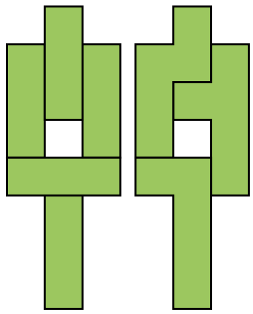
${}^{212}_{83}\mathrm{Bi} \to {}^{208}_{81}\mathrm{Tl} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$; альфа-распад.

СИММЕТРИЧНЫЕ БЛИЗНЕЦЫ

1.



2.



ДИНОЗАВР И СОКРОВИЩА АЦТЕКОВ

За тысячи лет железо просто превратилось бы в ржавчину и распалось, а древко окаменело бы, как и кости динозавра.

Первые фотографии получил Дагер только в XIX веке, а Монтесума жил в XV веке, до прихода испанцев.

Древние ацтеки не использовали домашних животных в качестве тягловой силы, а колесо у них встречалось только в игрушечных фигурках.

Деньгами у ацтеков служили какао-бобы, а монет у них просто не было.

ПЧЕЛИНЫЕ СОТЫ И ТЕТРАГЕКСЫ

Правильный октаэдр можно оклеить ещё тремя фигурками тетрагексов. Как их перегибать, указано на рисунках штриховыми линиями.