XXV турнир математических боёв имени А.П. Савина

Материал подготовил Александр Блинков

Ежегодно в конце июня школьники из многих городов съезжаются на летний турнир имени А. П. Савина. Приводим подборку избранных задач турнира 2019 года. После номера задачи указаны её автор и классы, в которых она предлагалась. Одна из задач Турнира (для 7 класса) помещена на задней обложке.

Избранные задачи

1. (*С.Токарев, 5–6*) В выражении ГУРУ + НОРА + + РАГУ + РУНО одинаковыми буквами зашифрованы одинаковые цифры, а разными – разные. Докажите, что эта сумма делится на трёхзначное число.

2. (*А.Шаповалов, 7–8*) Докажите, что для любого натурального n между числами n и $3n$ найдётся число, которое невозможно представить в виде суммы двух слагаемых с одинаковыми суммами цифр.

3. (*А. Блинков, 7*) В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны острые углы A и A_1, равны высоты, проведённые из вершин B и B_1, и равны медианы, проведённые из вершин C и C_1. Известно, что треугольники не равны. Может ли хотя бы один из них быть остроугольным?

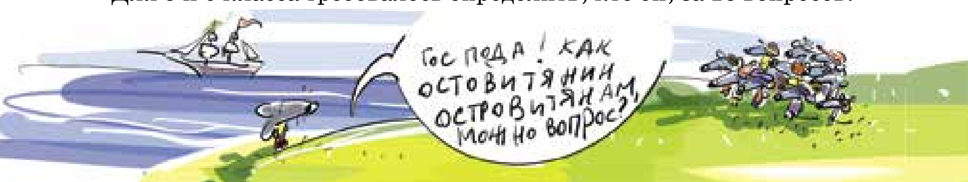
4. (*Г. Филипповский, 7–8*) На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена произвольная точка K. Пользуясь только линейкой без делений и карандашом, постройте какой-нибудь прямоугольник с вершиной K, вписанный в этот квадрат. (Каждая сторона квадрата должна содержать одну вершину прямоугольника.)

5. (*А.Пешнин, 7*) В треугольнике ABC провели высоту BH и биссектрису AL. Оказалось, что угол между прямыми BH и AL равен 30°. Найдите углы треугольника, если известно, что $2BH = AL + AB$.

6. (*М.Волчкевич, 8*) Дан параллелограмм $ABCD$. В треугольнике ABD проведены высоты BK и DM, H – точка их пересечения. Докажите, что прямые MK и CH перпендикулярны.

7. (*М.Хачатурян, 5–7**) На острове живут по шесть рыцарей, лжецов и монахов, причём все жители выглядят одинаково. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Если монаху задать вопрос, он находит в «Книге готовых ответов на все вопросы» точно такой же вопрос и отвечает так, как написано в ответе. Один островитянин забыл, кто есть кто, включая его самого. Задавая вопросы, требующие ответа «да» или «нет», он хочет выяснить, кто он: рыцарь, лжец или монах. Хватит ли ему 14 вопросов?

* Для 5 и 6 класса требовалось определить, кто он, за 15 вопросов.



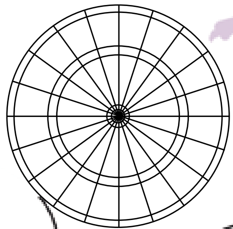
8. (*А.Грибалко, 5 – 8*) В каждой клетке прямоугольной таблицы стоит рыцарь или лжец. Каждый из них заявил, что в одной строке с ним находится больше рыцарей, чем в одном столбце. Докажите, что количество рыцарей делится на количество столбцов таблицы.

9. (*А.Шаповалов, 6 – 8*) В круговом коридоре аэропорта расположены 64 выхода на посадку. Каждая пара соседних выходов связана лентой, движущейся только в одну сторону. Известно, что ровно к одному выходу можно добраться от любого другого, пересаживаясь с ленты на ленту. За один вопрос можно про любую пару соседних выходов узнать, в какую сторону движется лента между ними. За какое наименьшее количество вопросов можно наверняка найти тот выход, к которому можно отовсюду доехать на ленте?

10. (*А.Шаповалов, 6*) Петя ставит на шахматную доску коня. Вася доски не видит. Своим ходом он обстреливает любые три клетки доски. Если на одной из них стоит конь, Вася выиграл, иначе Петя делает ход конём. Вася опять обстреливает три клетки, и т.д. Может ли Вася наверняка выиграть не более чем за 1000 ходов?

11. (*С. Токарев, 6 – 8*) Числа 1, 2, 3, ..., N записали по кругу в каком-то порядке. За одну операцию между каждыми двумя соседними числами записывают их полусумму, а исходные числа стирают. При каких N после нескольких таких операций снова могли получиться N целых чисел?

12. (*Н.Наконечный, 7 – 8*) Мишень для игры в дартс поделена на 20 секторов (см. рисунок). В каждом секторе записано число от 1 до 20, причём каждое число использовано один раз. Назовём мишень *правильной*, если любые два соседних сектора не имеют общего делителя, большего 1. Докажите, что количество различных правильных мишеней кратно 240. (Мишени, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.)



Художник Сергей Чуб