КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ, III ТУР

(«Квантик» № 7, 2019)

11. *Однажды Иван-царевич шёл по Измайловскому лесопарку и увидел знакомую ведьму.*

– Вы не подскажете, где закопан клад? – вежливо спросил Иван-царевич.

– Под высокой АЛЬФОЙ! – буркнула ведьма и исчезла.

Иван-царевич от досады чуть лопату не сломал: нет такого дерева – АЛЬФА, и слова такого нет! Если из слова АЛЬФА убрать одну букву, получится название лиственного дерева, если другую – наоборот, хвойного. Так и не пошёл клад искать.

Какое несуществующее слово мы заменили на АЛЬФУ?

Это «слово» – ***сосина***. Если убрать из него первую букву *с*, получится название лиственного дерева: *осина*; если убрать букву *и*, получится название хвойного дерева: *сосна*. В общем, Ивану-царевичу не повезло.

12. *Метатеза – это перестановка слогов или звуков в слове. Например, древнерусское слово* долонь *в результате метатезы превратилось в современное* ладонь. *А в некоторых русских говорах название некоего помещения в результате метатезы стало звучать так, что можно подумать, будто в нём производятся какие-то магические действия. Что это за помещение?*

Это помещение – ***кладовая*** (или ***кладовка***). В результате метатезы (перестановки) звуков *л* и *а* слово *кладовая* в некоторых говорах превратилось в *калдовая* и может восприниматься на слух как образованное от глагола *колдовать* (безударные *о* в этом глаголе, разумеется, произносятся как [а]).

13. *– И что же я значу? – спросил Корень.*

– «...Напрасно», – хором закричали Глагол, Существительное и Прилагательное.

– Ничего не «напрасно»! Наоборот: «Очень хорошо и с усердием»! – возмутились Другое Существительное и Другое Прилагательное.

Перечислите в правильном порядке все пять слов, участвовавших в споре.

Вопрос, спровоцировавший бурную дискуссию, задал корень *тщ-*. По-видимому, сам по себе этот корень значит что-то вроде «пытаться»; при этом в одной группе производных к этому значению добавляется значение «безуспешно, напрасно», а в другой – значение «старательно, с усердием». Первую группу в ходе дискуссии представляли слова ***тщиться***, ***тщета*** (или ***тщетность***) и ***тщетный***, вторую – слова ***тщание*** (или ***тщательность***) и ***тщательный***.

14. *Назовите два существительных, которые отличаются только указанием на разное количество, при этом одно из них означает «согласие», а другое – «лицемерие».*

Речь идёт о существительных ***единодушие*** и ***двоедушие***. Другой вариант ответа – *единомыслие* и *двоемыслие* – подходит несколько хуже, потому что слово *двоемыслие*, строго говоря, не несёт информации о том, как человек ведёт себя с окружающими.

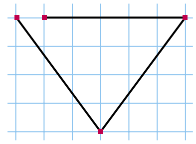
15. *Найдите русский глагол вида ХХить, где Х – некоторая последовательность букв.*

Самые распространённые глаголы, удовлетворяющие условию задачи, – это глаголы ***попоить*** и ***разразить***, к которым можно ещё добавить более редкие ***ввить*** и ***додоить***.

НАШ КОНКУРС, XII ТУР

(«Квантик» № 8, 2019)

56. *Кузнечик прыгает по узлам клетчатой плоскости. Он может перепрыгнуть из одного узла в другой, если расстояние между ними (по прямой) равно 5. В любой ли узел плоскости может попасть кузнечик?*



Ответ: да. Кузнечик может переместиться в соседний узел, сделав три прыжка длиной 5, как на рисунке. Действительно, косые прыжки на рисунке – гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4, и по теореме Пифагора они имеют длину 5. Такими сериями прыжков кузнечик может добраться до любого узла плоскости.

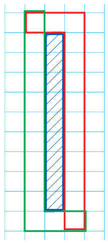
57. *Барон Мюнхгаузен составил квадратную таблицу умножения чисел от 1 до 100 – в каждой клетке таблицы 100×100 записал произведение номеров строки и столбца, в которых стоит эта клетка. Барон утверждает, что сумма всех полученных произведений – квадрат целого числа. Прав ли барон?*

Ответ: да. Сумма чисел в одном столбце, скажем, k-м, равна $k+2k+\ldots+100k=(1+\ldots+100)\cdot k$. Значит, сумма чисел во всех столбцах равна $(1+\ldots+100)\cdot1+(1+\ldots+100)\cdot2+\ldots+(1+\ldots+100)\times100=(1+\ldots+100)\cdot(1+\ldots+100)=(1+\ldots+100)^2$.

58. *Квантик и Ноутик играют на белой клетчатой доске 17×17. За ход надо закрасить в чёрный цвет состоящий из белых клеток многоугольник площади не более 9. Про-*

играет тот, кто не может сделать ход, начинает Ноутик. Кто из играющих может обеспечить себе победу и как ему играть?

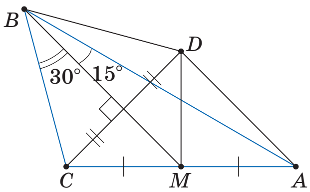
Ответ: Ноутик. Пусть Ноутик первым ходом закрасит прямоугольник 1×9 в центре доски, а дальше повторяет ходы Квантика центрально-симметрично, то есть закрашивает точно такой же многоугольник, получающийся поворотом доски на 180° относительно её центра. Ему всегда удастся это сделать, потому что никакой многоугольник Квантика не сможет занять две симметричные клетки. Действительно, если такой многоугольник нашёлся, возьмём ему симметричный (например, как на рисунке). Вместе они полностью окружают первый прямоугольник 1×9, а значит, покрывают суммарно хотя бы 24 клетки, что противоречит условию.



59. *На прямой отмечено несколько точек. За ход между каждой парой соседних точек ставится одно и то же количество новых точек: 3, 4 или 5 (для очередного хода можно выбирать какое-то одно из этих чисел). Может ли на прямой после нескольких таких ходов (не менее одного) оказаться ровно 333444555 отмеченных точек?*

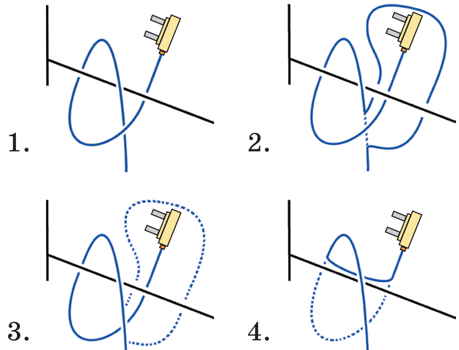
Ответ: нет. Покрасим самую левую отмеченную точку в белый цвет, а все остальные, в том числе новые точки, будем красить в чёрный. Тогда за ход число чёрных точек возрастает в 4, 5 или 6 раз. Но 333444554 не делится ни на 4, ни на 5, ни на 6 (проверьте!).

60. *Найдите углы треугольника, если его медиана образует со сторонами, выходящими из той же вершины, углы 15° и 30°.*



Ответ: 45°, 105° и 30°. Пусть в треугольнике ABC медиана BM образует со сторонами AB и BC углы 15° и 30° соответственно. Опустим из точки C на BM перпендикуляр и продлим на его длину, получив точку D. Треугольник CDB будет равносторонним, а CMD – равнобедренным. Значит, $AM = CM = DM$, тогда A, D, C лежат на одной окружности с центром в M, угол ADC опирается на диаметр, а значит, равен 90°. Тогда в треугольнике ADB имеем: $\angle DBA = 15^\circ$, $\angle ADB = 90^\circ + 60^\circ$, откуда $\angle DAB = 15^\circ$, то есть $AD = DB = DC$. Тогда треугольник ADC – равнобедренный прямоугольный, откуда $\angle ACB = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$ и тем самым $\angle BAC = 30^\circ$.

ЗАПУТАВШИЙСЯ ШНУР («Квантик» № 9, 2019)



ЕЩЁ ДАЛЬШЕ В МИКРОМИР: КВАРКИ

1. π^--мезон: $\overline{u}d$; K^+-мезон: $u\overline{s}$.

2. Нейтрон: udd. Антинейтрон – не то же самое, что нейтрон: $\overline{u}\overline{d}\overline{d}$.

3. Сигма-минус-гиперон, Σ^-: dds, анти-сигма-минус-гиперон: $\overline{d}\overline{d}\overline{s}$. Другой гиперон с зарядом +1 – сигма-плюс-гиперон, Σ^+: uus.

ПЕСОЧНАЯ ГОРКА

1. Мишка использовал идею подобия. Физические причины, определяющие форму горки, не зависят от её размера – по крайней мере, для не очень больших горок, которые можно сделать в песочнице. Поэтому все горки подобны друг другу – у всех «крутизна склона» примерно одна и та же, все размеры отличаются в одно и то же число раз. Значит, высота прямо пропорциональна радиусу: на графике экспериментальные точки расположатся вдоль прямой линии, примерно как на рисунке 1.

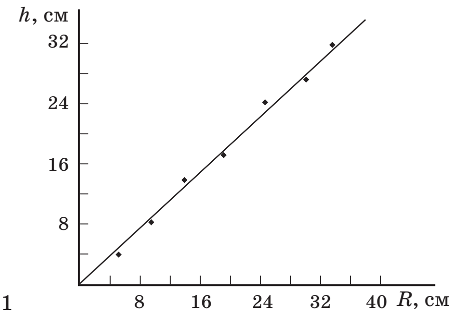


Рис. 1

2. Чтобы теоретически определить зависимость веса песка от радиуса горки, опять нужна идея подобия. Если одна горка по всем измерениям больше другой в 2 раза, то можно разделить их обе на воображаемые маленькие кубики (а по краешкам – другие кусочки, например половинки кубиков), и сторона каждого кубика первой горки будет больше стороны соответствующего кубика второй в 2 раза. А объём – в $2^3 = 8$ раз. Можно заменить в этом рассуждении 2 на R: объём любой горки прямо пропорционален кубу её радиуса (или высоты), $V = c \cdot R^3$. Чтобы найти массу, умножим объём на плотность песка, получим $M = m \cdot R^3$. Здесь m и c – некоторые числа. Если у вас есть весы, можно это тоже проверить экспериментально и, построив график, сравнить его с теоретическим предсказанием: коэффициент m можно определить по одной из точек.

3. Ответ: от 0,7 до 0,9, в зависимости от степени сухости и сорта песка.

На песчинку, лежащую на склоне, действуют три силы: сила притяжения Земли (mg), направленная вниз, сила реакции опоры (N), направленная перпендикулярно поверхности, и сила трения ($F_{тр}$) – вдоль поверхности. (На самом деле сумма двух последних – это одна сила, действующая на песчинку со стороны остального песка.) Коэффициент трения – это отношение $\mu = F_{тр}/N$. Чтобы песчинка не двигалась, сумма всех сил должна быть равна нулю, а значит, сумма векторов N и $F_{тр}$ должна быть направлена вертикально вверх.

Угол между N и вертикалью – такой же, как угол наклона горки (они получаются друг из друга поворотом картинки на 90°). Из подобия голубого и жёлтого треугольников получаем $\mu = F_{тр}/N = h/R$ – коэффициент трения равен отношению высоты горки к радиусу её основания. Его можно подсчитать для какой-нибудь одной из точек графика (одной горки) – но точнее взять среднее по всем измеренным горкам.

Между прочим, проведённая «посередине между точками» прямая линия на рисунке 1 имеет примерно тот же угол наклона, что и – в среднем – склоны песочных горок. Поэтому бежевый треугольник на рисунке 3 тоже подобен голубому и жёлтому на рисунке 2, а значит, можно измерить коэффициент трения и по нему; получится точнее, чем по одной какой-то точке.

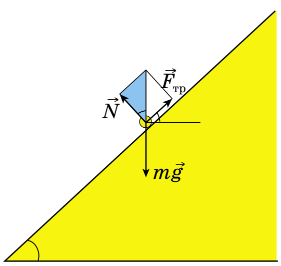


Рис. 2

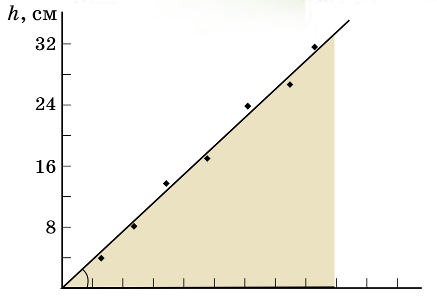


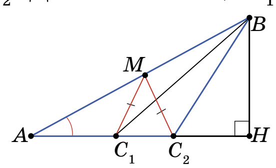
Рис. 3

XXV ТУРНИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ БОЁВ ИМЕНИ А.П.САВИНА

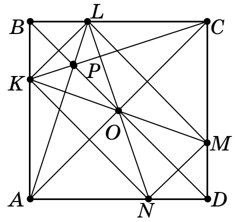
1. Преобразуем: ГУРУ + НОРА + РАГУ + +РУНО = 100ГУ + РУ + 100НО + РА + 100РА + +ГУ + 100РУ + НО = (ГУ + РУ + РА + НО) · 101. Так как в скобках стоит натуральное число, то заданная сумма делится на 101.

2. При $n > 6$ между n и $3n$ найдётся число k, у которого сумма цифр нечётна и все цифры, кроме первой, – девятки: берём число с тем же количеством знаков, что и у $n+1$, и либо сохраняем первую цифру (остальные цифры – девятки), либо первую цифру увеличиваем на 1 (остальные цифры – девятки); оба эти числа меньше чем $3n$. Пусть мы представили k в виде суммы двух слагаемых с одинаковыми суммами цифр. Тогда сумма цифр у k равна сумме сумм цифр слагаемых (потому что не может быть переходов через десяток). Но два равных числа не могут в сумме дать нечётную сумму цифр.

3. Ответ: не может. Рассмотрим задачу на построение треугольника по следующим данным: острому углу A, высоте BH и медиане CM. Из условия следует, что она должна иметь два решения. При этом прямоугольный треугольник ABH по катету и острому углу восстанавливается однозначно. Вершина C должна находиться от середины M стороны AB на расстоянии, равном заданной медиане, то есть окружность с центром M и радиусом, равным медиане, должна пересечь отрезок AH в двух внутренних точках C_1 и C_2. Действительно, C_1 и C_2 симметричны относительно середины AH. Тогда оба треугольника ABC_1 и ABC_2 обязательно будут тупоугольными.



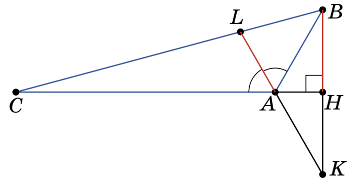
4. Пусть искомый прямоугольник построен, тогда его соседние вершины симметричны относительно диагоналей квадрата, а противоположные вершины симметричны относительно центра квадрата. Отсюда следует, например, такое построение. Проведём



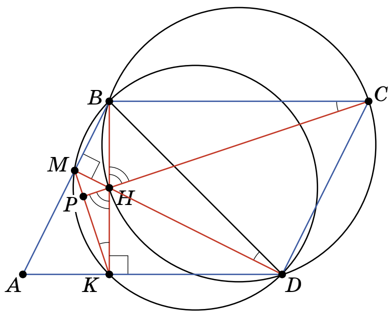
1) диагонали квадрата, O – точка их пересечения;
2) прямую KO до пересечения со стороной CD в точке M;
3) прямую CK до пересечения с BD в точке P;
4) прямую AP до пересечения с BC в точке L;
5) прямую LO до пересечения с AD в точке N.

Прямоугольник $KLMN$ – искомый.

5. Ответ: $\angle A = 120°$, $\angle B = 45°$, $\angle C = 15°$. Из условия следует, что угол между прямыми AL и AC равен $60°$, то есть $\angle A = 120°$. Пусть прямые AL и BH пересекаются в точке K. Тогда $\angle HAK = \angle CAL = 60° = \angle HAB$, то есть точки B и K симметричны относительно прямой AC. По условию $BK = 2BH = AL + AB = LK$, значит, $\angle KBL = \angle KLB = 75°$, а $\angle B = 75° - 30° = 45°$.



6. Пусть прямые MK и CH пересекаются в точке P (см. рисунок). Пусть $\angle PKH = \alpha$, $\angle PHK = \angle CHB = \beta$. Докажем, что $\alpha + \beta = 90°$, откуда и будет следовать утверждение задачи.



Так как $\angle BMD = \angle BKD = 90°$, то $BMKD$ – вписанный четырёхугольник. Следовательно, $\angle BDM = \angle BKM = \alpha$. Кроме того, $\angle CBH = \angle CDH = 90°$, значит, $BCDH$ – также вписанный четырёхугольник. Поэтому $\angle BCH = \angle BDM = \alpha$. Из треугольника BCH получим, что $\alpha + \beta = 90°$, что и требовалось.

7. Ответ: да. Пусть забывший, кто он (назовём его Васей), последовательно задаёт островитянам вопрос «Верно ли, что дважды два – четыре?», пока не получит 7 одинаковых ответов. Так как рыцари и лжецы дают на этот вопрос разные ответы, и каждых на острове не более шести, то среди семи одинаково ответивших островитян есть монахи. А так как все монахи отвечают одинаково, то среди ответивших иначе их нет. Назовём группу людей, ответивших иначе, «чистой». Далее заметим, что, во-первых, мы знаем, из лжецов или рыцарей состоит «чистая» группа, а во-вторых, зная, кто перед нами (рыцарь или лжец), и задав два вопроса: «Я рыцарь?» и «Я лжец?» (и заменив ответы на противоположные, если разговариваем со лжецом), Вася сможет узнать, кто он. Если в «чистой» группе никого не оказалось, пусть Вася задаёт вопросы дальше, пытаясь всё же найти человека в эту группу. Возможны три случая.

1) Вася задаст 12 вопросов и так и не найдёт никого в чистую группу, продолжая получать один и тот же ответ. Но тогда, если эти одинаковые ответы были «да», то это 6 рыцарей и 6 монахов, и больше их на острове нет, следовательно, Вася – лжец. Аналогично, если это ответы «нет», то Вася – рыцарь.

2) Если в «чистой» группе уже было от 1 до 5 человек, то задано не более 12 вопросов, и за два вопроса представителю чистой группы Вася узнает о себе, кто он.

3) Если в чистой группе 6 человек, и это рыцари, то, во-первых, рыцарей на острове больше нет, а во-вторых, задано ровно 13 вопросов. Значит, Вася – не рыцарь, и достаточно ещё только одного вопроса рыцарю: «Я лжец?». В случае отрицательного ответа Вася – монах, иначе – лжец. Аналогично, если это лжецы, то Вася – не лжец, и достаточно спросить лжеца: «Я рыцарь?». В случае положительного ответа Вася монах, иначе – рыцарь.

Более шести человек в «чистой» группе быть не может (по принципу Дирихле).

Придумайте, как Васе узнать, кто он, задав не более 13 вопросов.

8. Если рыцарей нет, то требуемое утверждение выполняется. Если они есть, то найдём столбец, в котором их количество максимально (возможно, не единственный). Рассмотрим каждого из рыцарей этого столбца. В строке, где он стоит, рыцарей больше, чем в любом столбце таблицы, а тогда лжецов в этой строке нет – иначе такой лжец говорил бы правду. То есть, все эти строки состоят из одних рыцарей. Других рыцарей в таблице нет (иначе это противоречит максимальности рыцарей в выбранном столбце). Следовательно, количество рыцарей делится на количество столбцов.

9. Ответ: за 63 вопроса. Назовём искомый выход «главным».

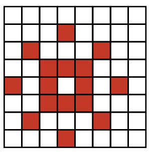
Оценка. Пусть мы проверили 62 ленты и оказалось, что все они движутся по часовой стрелке. Для оставшихся двух лент есть по меньшей мере две возможности: 1) первая движется по часовой стрелке, вторая – против; 2) наоборот. В обоих случаях выход, к которому везёт лента против часовой стрелки, будет единственным «главным». Но для случаев 1) и 2) это разные выходы, так что 62 вопросов недостаточно.

Алгоритм. Спросим про любую ленту. Пусть, например, она движется по часовой стрелке. Идя от ленты по часовой стрелке, последовательно спрашиваем про очередные ленты, пока не найдём ленту, движущуюся навстречу предыдущей. Возможны два случая:

1) мы нашли встречную ленту не более, чем за 63 вопроса. Тогда от выхода на стыке встречающихся лент доехать никуда нельзя, значит, он и есть «главный»;

2) мы проверили 63 ленты подряд, и все они движутся по часовой стрелке. Тогда последняя лента не может тоже двигаться по часовой, иначе по кругу можно от любого выхода доехать до любого другого, что противоречит условию единственности. Значит, 64-я (не проверенная) лента движется навстречу остальным, и «главным» будет выход на стыке 63-й и 64-й лент.

10. Ответ: нет. Пусть Петя на ход вперёд знает, какие клетки обстреляет Вася. Покрасим 16 клеток доски в красный цвет, как показано на рисунке. Тогда сначала Петя ставит коня на красную клетку, которую Вася первым ходом не обстреляет. Заметим, что из каждой красной клетки можно сделать ход на 4 другие красные клетки. Петя ходит на ту из них, которую Вася следующим ходом не обстреляет. Действуя так, Петя предотвратит победу Васи в течение любого числа ходов.



11. Ответ: при $N = 4k$. Заметим, что общая сумма чисел, очевидно, не меняется. Будем рассуждать «с конца». Пусть у нас получились целые числа. Тогда за один шаг до этого суммы во всех парах соседей были чётными. Рассмотрим несколько случаев.

1) $N = 4k + 2$. Тогда числа разбиваются на пары, в каждой паре сумма чётна. Но сумма всех исходных чисел нечётна. Противоречие.

2) $N = 2k + 1$. Покажем, что если все суммы чётные, то все числа – целые. Просуммировав все суммы пар чисел, получим чётное число, равное удвоенной сумме всех чисел. Значит, сумма всех чисел – целая. С другой стороны, сумма всех чисел, кроме одного выбранного, разбивается на k чётных сумм. Тогда выбранное число тоже целое. Мы могли выбрать любое число, значит, все числа целые.

Итак, если на каком-то шаге числа все получились целыми, то так было и шагом раньше, и на всех предыдущих шагах. Но уже после первого шага найдётся нецелое число, потому что найдётся пара соседей разной чётности.

3) $N = 4k$. Существует пример. Расставим числа по возрастанию: 1, 2, 3, ..., $4k$. Тогда на втором шаге все числа снова станут целыми.

12. Заметим, что числа 1, 11, 13, 17 и 19 не имеют общих делителей ни с какими другими расставленными числами. Из каждой правильной мишени перестановками чисел 1, 11, 13, 17, 19 и симметрией относительно вертикальной прямой можно получить $5! \cdot 2 = 240$ правильных мишеней. Все эти мишени различны: действительно, пусть две получившиеся мишени отличаются только поворотом. Тогда в них ориентации треугольника 2 3 4 должны совпадать, значит, если симметрия была использована при получении одной из мишеней, то и при получении второй она также использовалась. Отразив, если нужно, мишень, сведём к случаю, когда мишени получены из одной только перестановками пяти чисел, а такие мишени не получаются друг из друга поворотом. Значит, общее количество правильных мишеней кратно 240.

ДВА ФОТО ЗЕМЛИ – ОБА ЛИ НАСТОЯЩИЕ?

Оба фото настоящие, но сделаны *с разного расстояния* от Земли. На фото с большой Северной Америкой Земля существенно ближе к наблюдателю, но ещё «вся попадает в объектив». Из-за трёхмерности и шарообразности Земли мы по-прежнему видим шар, но реально многое по краям уже скрылось из виду из-за другого угла обзора – вот Америка и занимает бóльшую долю. Заметим ещё, что левое фото склеено из нескольких – наподобие того, как делают панорамные снимки. Так проще, чем отправлять в космос хитрый фотоаппарат «рыбий глаз» для фото с большим углом обзора.