№ 10 | октябрь 2019

ЖУРНАЛ КВАНТИК ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

№ 10
октябрь
2019

МИСТИЧЕСКАЯ СЕМЁРКА ДЖОНА МИЛЛЕРА

ПЛИТКИ И ЧИСЛА ХЕЕША

ПЕСОЧНАЯ ГОРКА

Enter

ПОДПИСКА на 2020 год

Подписаться на журнал «КВАНТИК» вы можете в любом отделении связи Почты России и через интернет

КАТАЛОГ «ГАЗЕТЫ. ЖУРНАЛЫ» АГЕНТСТВА «РОСПЕЧАТЬ»

Индекс **80478** для подписки на год

Индекс **84252** для подписки на полгода или на несколько месяцев полугодия

также можно подписаться онлайн по ссылке **kvan.tk/rosp**

ОБЪЕДИНЁННЫЙ КАТАЛОГ «ПРЕССА РОССИИ»

Индекс **11348** для подписки на год

Индекс **11346** для подписки на полгода или на несколько месяцев полугодия

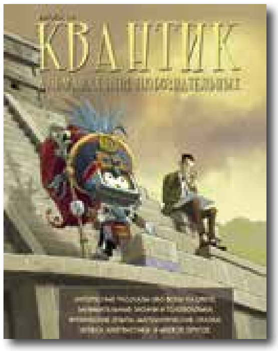
Подробнее обо всех способах подписки читайте на сайте **kvantik.com/podpiska**

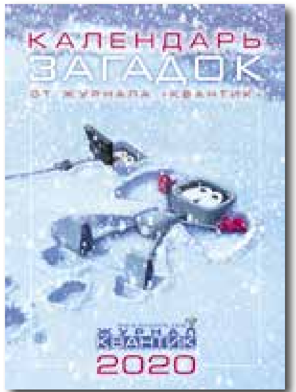
НАШИ НОВИНКИ

Кроме журнала редакция «Квантика» выпускает альманахи, календари загадок, наборы плакатов и книги серии «Библиотечка журнала «Квантик»

Недавно вышли в свет:

- Альманах «Квантик». Выпуск 14
- Календарь загадок на 2020 год





Журнал «Квантик» № 10, октябрь 2019 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор: С.А.Дориченко
Редакция: В.Г.Асташкина, Е.А.Котко, Р.В.Крутовский, И.А.Маховая, А.Ю.Перепечко, М.В.Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas
Вёрстка: Р.К.Шагеева, И.Х.Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях связи Почты России:
▪ Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)
▪ Объединённый каталог «Пресса России» (индексы **11346** и **11348**)
Онлайн-подписка
на сайте агентства «Роспечать» **press.rosp.ru**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84x108/16
Тираж: 5000 экз.
Подписано в печать: 03.09.2019
Отпечатано в типографии ООО «ТДДС-Столица-8»
Тел.: (495)363-48-84
http://capitalpress.ru
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

СОДЕРЖАНИЕ

Валерия Сирота

ЕЩЁ ДАЛЬШЕ В МИКРОМИР: КВАРКИ

Когда ядро кувалдой разбиваешь,
добыть пытаясь в нём какой-нибудь нейтрон –
оттуда вдруг со страшным скрипом выползает
частица анти-сигма-минус-гиперон.

Из физфаковской песни

Эта статья для тех, кто читал про элементарные частицы и ядерные реакции в «Квантиках» №8 и №9 за 2019 г. Раз вы уже так много узнали, нужно признаться вам ещё кое в чём. До сих пор у нас так получалось, что всё на свете состоит из протонов, нейтронов (объединённых в атомные ядра) и электронов. И это правда – почти. Всё вещество, с которым мы привыкли иметь дело, всё, что мы видим вокруг, действительно именно из них и состоит. Но всё же это не единственные на свете виды элементарных частиц. Если хорошенько поискать, найдутся и другие. И этих видов очень много! Если очень сильно стукнуть по ядру «кувалдой», оттуда элементарные частицы так и посыпятся. Всякие-разные мезоны, гипероны, совсем недолго живущие резонансы... Откуда они все берутся в ядре, если их там не было? И как стукнуть по ядру кувалдой? Точнее, что взять вместо кувалды, чтобы по такому маленькому ядру попасть?

На первый вопрос постараемся ответить чуть позже, а пока начнём со второго. В прошлой статье мы обсуждали атомные реакторы: там для разбивания ядер используют нейтроны. Это нужно для создания цепной реакции: среди осколков ядер много нейтронов, а отсутствие электрического заряда даёт им возможность спокойно «подобраться» к ядру – электрическое отталкивание не мешает. Но это годится, когда требуется много не очень сильных столкновений – ведь непрочные ядра урана или плутония и так готовы развалиться, только подтолкни. А нам нужно пусть всего несколько, но так, чтобы уж стукнуть так стукнуть! Для этого нейтроны не годятся: их, опять-таки из-за отсутствия заряда, очень трудно разогнать до большой скорости. Только если нагреть до каких-то совсем уж гигантских температур, но с таким нагретым веществом очень трудно справляться.

Да и лететь они тогда будут куда попало, могут попасть совсем не в те ядра, в которые мы хотели... Гораздо лучше для этой цели иметь дело с протонами. Их удобно разгонять – достаточно просто поместить их в электрическое поле. Для этого нужно, грубо говоря, взять две параллельные металлические пластины и присоединить их проводами к полюсам батарейки – вот между пластинами и готово электрическое поле. Только батарейка для наших целей нужна очень мощная. Управлять пучком заряженных частиц тоже удобно: их легко заставить повернуть с помощью магнита. Когда пучок протонов готов, можно обстрелять им какую-нибудь мишень; часть протонов пролетит мимо, но некоторые ударятся в ядра мишени.

Но тут надо сказать, что когда протон очень быстрый, он не ударяется (говорят: рассеивается) обо всё ядро целиком, а влетает в ядро и стукается об один какой-то из его протонов или нейтронов. А раз так, можно сделать ещё лучше: не обстреливать неподвижную мишень быстрыми протонами, а разогнать два пучка частиц и направить навстречу друг другу! То-то сильный получится удар! Особенно если взять один пучок протонов, а другой – антипротонов. Помните? – У антипротонов заряд отрицательный, и электрическое отталкивание не будет мешать ему и встречному протону подлететь друг к другу поближе. Даже наоборот, электрическое притяжение поможет.

Такие установки, в которых разгоняются заряженные частицы (можно и электроны разгонять, не обязательно протоны), называются *ускорителями*. А установки, в которых разогнанные частицы сталкиваются друг с другом, называются *ускорителями на встречных пучках*, или *коллайдерами*: to collide по-английски – сталкиваться.

Ну хорошо, стукнем мы очень сильно протоном по антипротону (или по протону или нейтрону в ядре) – что же при этом произойдёт? А вот что: во все стороны полетит куча протонов, антипротонов и новых, незнакомых нам пока частиц. Откуда они все там взялись? Ответ такой: родились.

Мы привыкли к закону сохранения массы: материя просто исчезнуть не может. Если игрушка про-

пала – значит, она или её обломки лежат где-нибудь под шкафом. Даже если вода из стакана исчезла, мы понимаем, что она испарилась, и масса водяных паров в воздухе увеличилась на столько же, на сколько уменьшилась масса воды. Закон сохранения массы прекрасно работает в окружающей нас природе, но не годится, когда скорости близки к скорости света.

В этом случае сохранения массы уже нет; есть только сохранение энергии. И если энергии достаточно много, можно «из ничего» (на самом деле как раз «из энергии») делать что-то, например частицы. А масса – это только один из видов энергии, один из способов её хранения. Вам, возможно, попадалась на глаза красивая формула Эйнштейна: $E = mc^2$. Она как раз об этом. С этой точки зрения, частица – это всего лишь определённый, хорошо упакованный кусок энергии. Правда, просто взять и сделать из ничего одну частицу нельзя. Есть всё-таки ещё другие ограничения – другие законы сохранения. Например, должен сохраняться электрический заряд. Поэтому сделать один протон нельзя. А вот пару протон-антипротон – пожалуйста! Если, конечно, достаточно энергии.

Чтобы породить при столкновении новую пару протон-антипротон, надо разогнать уже имеющиеся частицы «батарейкой» напряжением в миллиард (!) вольт. Пару электрон-позитрон породить гораздо легче, ведь они в 2000 раз легче протона – поэтому хватит «батарейки» в полмиллиона вольт. Самый мощный из существующих Большой адронный коллайдер на границе Швейцарии и Франции имеет «разгонную батарейку» напряжением в 7 тысяч миллиардов вольт! Так что при столкновении рождаются не одна-две, а сотни и тысячи частиц.

Некоторые из них легче протонов, другие – во много раз тяжелее. Одни заряжены, другие нет. Их открыто уже больше 300. Но все частицы, из которых состоит материя, кроме уже известных нам протонов, электронов и их античастиц, да ещё нескольких совсем-совсем легких, – нестабильны, то есть распадаются (превращаются во что-то другое) через короткое время. Для нейтрона это время, как вы, может быть, помните из прошлой статьи, около 15 минут. Для всех остальных частиц – намного меньше, это крошечные доли секунды.

Но как же теперь быть? Только мы решили, что всё на свете состоит всего из трёх сортов элементарных «кирпичиков» – а их, оказывается, снова целый зоопарк. Как в них разбираться?

Физики и тут придумали, как выйти из положения. Оказывается, всё это множество элементарных частиц состоит всего из нескольких видов ещё более элементарных частиц[1].

А именно, все обнаруженные частицы можно разделить на две группы – *лептоны* и *адроны*[2]. Лептонов всего 12, и они ни из чего уже больше не состоят (по крайней мере, мы сейчас так думаем). Из них мы уже знакомы с четырьмя – электрон, нейтрино и их античастицы, позитрон и антинейтрино. Есть ещё *мюон* и *таон* (*тау-лептон*), похожие на электрон и имеющие такой же заряд, но более тяжёлые, и два соответствующих типа нейтрино – мюонное и тау. Плюс их античастицы. Все они не участвуют в сильных взаимодействиях, но участвуют в слабых – то есть в превращениях частиц друг в друга.

ЛЕПТОНЫ

$\longrightarrow$ Масса $\longrightarrow$			Заряд (1–заряд протона)
e^- электрон	μ^- мюон	τ^- тау-лептон, таон	–1
ν_e (электронное) нейтрино	ν_μ мюонное нейтрино	ν_τ тау-нейтрино	0

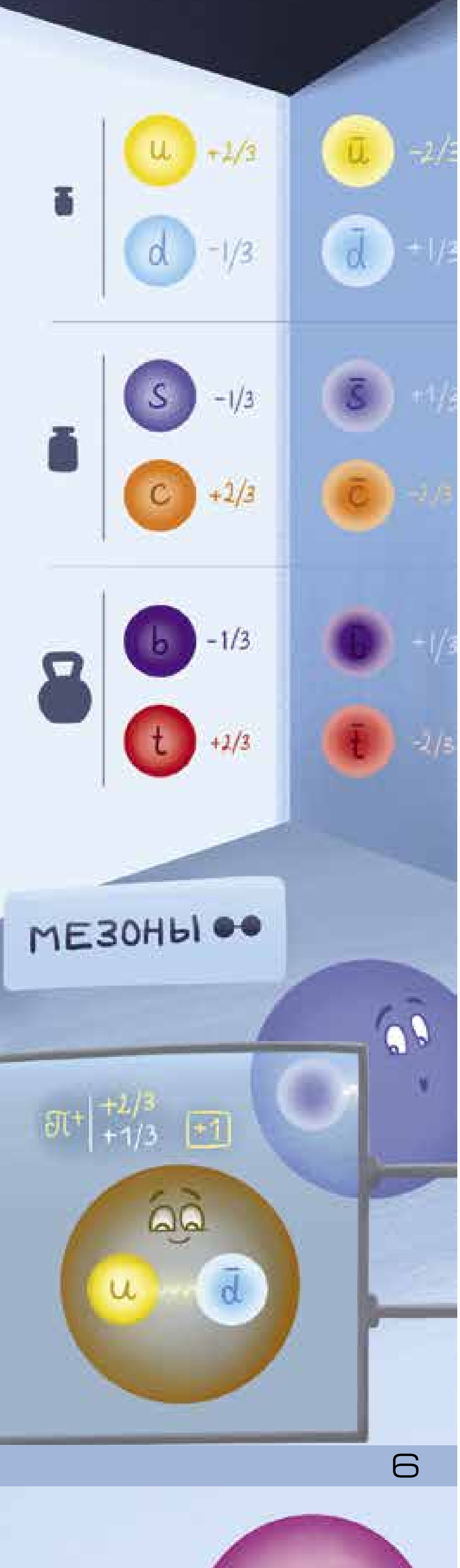
И ещё античастицы: e^+, μ^+, τ^+ – заряд +1, $\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$, $\bar{\nu}_\tau$ – антинейтрино, заряд 0. Массы нейтрино неизвестны, есть только ограничения сверху.

А что же остальные, адроны, которых несколько сотен? Вот они все состоят из... *кварков*.

Кварков тоже всего 12, как и лептонов, и тоже половина из них – антикварки. Остаётся 6. И они тоже подразделяются, как и лептоны, на три пары,

[1] Они называются *фундаментальными*.

[2] Есть ещё несколько особых частиц – переносчиков взаимодействия. Здесь мы их обсуждать не будем.



которые по свойствам похожи друг на друга, а отличаются массой. В каждой паре один из кварков имеет заряд плюс 2/3 заряда электрона (!), а другой – минус 1/3. У антикварков, как всегда, всё ровно наоборот.

КВАРКИ: их обозначения, английские и русские названия и заряды

u +2/3 up, верхний	*s* −1/3 strange, странный	*b* −1/3 bottom или beauty, прелестный, красивый
d −1/3 down, нижний	*c* +2/3 charm, очарованный	*t* +2/3 top или truth, истинный

(Цветная линия показывает порядок возрастания массы. Обратите внимание, что заряды более тяжёлого и более лёгкого кварков в первом столбце «перепутаны» по сравнению с остальными столбцами.)

Вот новости! До сих пор у нас дробных зарядов не было… И не будет! Кварки могут комбинироваться только в такие сочетания, в которых их суммарный заряд (в единицах заряда электрона) целый. И только в таких сочетаниях их можно наблюдать в природе. Эти сочетания и есть элементарные частицы; хоть они и состоят из кварков, но отдельный кварк из них выделить нельзя, невозможно разделить элементарную частицу на кусочки. Поэтому они всё-таки элементарные, несмотря на их внутреннюю структуру.

Удивительное свойство «пленения» кварков внутри частицы называется *конфайнментом*. Во всех уже изученных нами взаимодействиях чем дальше частицы оказываются друг от друга, тем слабее сила, притягивающая их друг к другу (или отталкивающая). А у кварков наоборот – чем дальше они отодвигаются друг от друга, тем сильнее притягиваются! И наоборот: чем ближе они друг к другу прижимаются, тем слабее взаимодействуют. Как и почему такое получается, пока не очень понятно.

Частицы, состоящие из двух кварков, называются *мезонами*. Точнее, они состоят из кварка и антикварка, иначе не получится целый заряд. Например, $u\bar{d}$ – это π^+-мезон (читается: пи-плюс). Все частицы, имеющие *s*-кварк (или его антикварк), называются *странными*, имеющие *c*-кварк – *очарованными*, имеющие *b*-кварк – *прелестными*.

Задача 1. А из каких кварков состоит античастица π^+-мезона – π^--мезон? Из чего состоит K^+-мезон, если он самый лёгкий из странных мезонов, а заряд у него +1?

Адроны из трёх кварков называются *барионами*. Самый лёгкий барион – как раз протон: это комбинация *uud*.

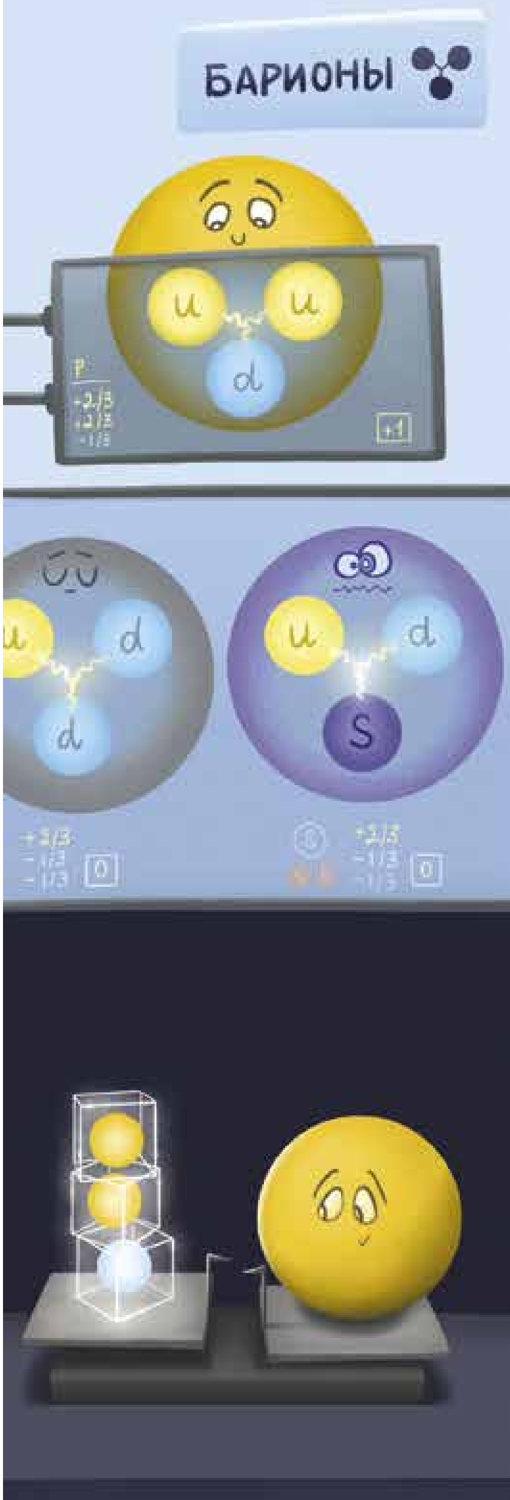
Задача 2. Второй нестранный адрон – это нейтрон. Из каких кварков состоит он? Бывает ли антинейтрон?

Задача 3. *Гиперонами* называют странные, но не очарованные (и тем более не прелестные) барионы. Сигма-гипероны – лёгкие. Индекс плюс или минус (или ноль) в обозначении и названии адрона соответствует знаку заряда. Что же такое анти-сигма-минус-гиперон? Отличается ли он от сигма-плюс-гиперона?

Бывают ещё *тетра-* и *пентакварки*, состоящие из четырёх и пяти кварков. Но это уже совсем экзотика.

Кварки участвуют в сильном взаимодействии – собственно, их конфайнмент это как раз проявление сильного взаимодействия. И уж там, внутри адрона, это взаимодействие действительно сильное – его энергия во много раз больше энергии, заключённой в самих кварках. Из-за этого масса любого адрона много больше массы составляющих его кварков. Сильное взаимодействие, которое удерживает протоны и нейтроны в ядре, – это всего лишь жалкие «хвостики» тех сил, которые бушуют внутри них самих. И в слабом взаимодействии кварки тоже участвуют – иначе как бы могли в нём участвовать сделанные из них адроны? Легко догадаться, что уже знакомый нам по прошлой статье распад нейтрона – это превращение d-кварка в u-кварк: $d \to u + e^- + \bar{\nu}_e$.

Теория кварков прекрасно объясняет многочисленные виды новых частиц, рождающихся в столкновениях при очень высоких энергиях. К сожалению, для понимания того, что творится в атомных ядрах при обычных «ядерных» энергиях – например, для понимания, как именно устроены ядерные силы или какие именно ядра устойчивы, а какие нет и почему, – она не очень помогает. Во всяком случае, и в «кварковой» теории, и в «обычной» ядерной физике ещё куча неотгаданных загадок. Подрастайте, некоторые из них вас дождутся!



Художник Мария Усеинова

Вера Винниченко

МИСТИЧЕСКАЯ СЕМЁРКА ДЖОНА МИЛЛЕРА

В 1956 году серьёзный человек, знаменитый американский психолог Джон Миллер, пожаловался, что везде и повсюду его преследует одно и то же число: мистическая семёрка. Он видит её в письмах друзей, в счетах за квартиру, на улице, в театре, в книгах. 7 дней недели, 7 цветов радуги, 7 нот, 7 смертных грехов, 7 чудес света, 7 гномов. Тайна вездесущей семёрки настолько захватила учёного, что он приступил к собственному расследованию, которое началось с экспериментов Германа Эббингауза.

Психолог-экспериментатор Г. Эббингауз изучал память. Для этого он мучил своих испытуемых, заставляя заучивать бессмысленные слоги (бов, гис, лоч и т. п.). Одно из открытий Эббингауза состояло в том, что если количество слогов не превышало семи, испытуемые запоминали их уже после первого прочтения. Для запоминания большего количества надо было читать материал несколько раз.

В 1949 году группа экспериментаторов (Кауфман, Лорд, Рис, Фолкман) из колледжа Маунт-Холиок показывала своим испытуемым точки на экране – от 1 до 200 штук за раз – и просила определить их количество. Трудность состояла в том, что время предъявления было очень маленькое, всего 1/5 секунды, чтобы испытуемые не успели сосчитать. Оказалось, что если точек было меньше семи, испытуемые вообще не ошибались.

Мистическая семёрка стала краеугольным камнем и в эксперименте Эббингауза, и в эксперименте в Маунт-Холиок. Джон Миллер уловил сходство между результатами двух экспериментов и решил поставить свой. Он предъявлял испытуемым цифры, числа, отдельные звуки или целые слова, и во всех случаях получалось примерно одно и то же – испытуемые начинали ошибаться, если число элементов в ряду было больше семи. Что значит «примерно»? Некоторые запоминали чуть больше объектов, некоторые – чуть меньше. Поэтому число Миллера – это не просто 7, а некоторая область: 7 ± 2. Миллер назвал этот предел *симультанностью* восприятия (от латинского simul – в одно и то же время). Это число психологи ещё называют *объёмом кратковременной памяти*.

Семь – это не очень много. Как тогда весь мир помещается в нашей голове? Как мы запоминаем слово, если в нём больше семи букв? Идея Миллера в следующем: чтобы «победить» семёрку, нужно преобразовать входную информацию. Объединить элементы в группы, чтобы число групп было меньше или равно семи. Например, составить из цифр число, из букв – слово, из слов – историю. Миллер считает, что это преобразование и есть мышление, или, с точки зрения теории информации, «процесс перекодирования».

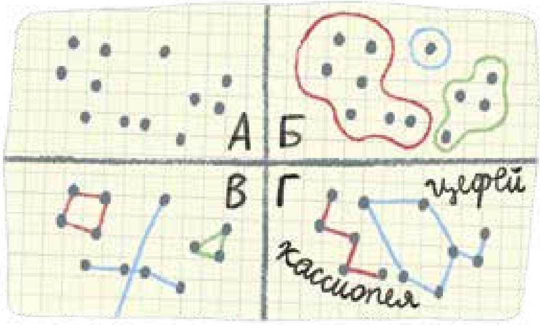


Рис.1. Способы перекодирования по Миллеру.
А – 12 точек, превышающих симультанность восприятия, Б – объединение точек в области, В – объединение в геометрические фигуры, Г – объединение точек в созвездия.

Здесь, конечно, очень много непонятного. Как мозг кодирует и перекодирует информацию? Мозг – это такая тонкая материя, что даже у современных учёных, вооружённых микроскопами, энцефалографами и томографами, нет внятного ответа. Поэтому если вы захотите поставить в тупик какого-нибудь бородатого профессора, задайте ему этот коварный вопрос.

Но всё-таки открытие Миллера позволило немного пролить свет на работу нашего мозга. Ведь Миллер обнаружил, что наше мышление помогает преодолевать ограничения нашей памяти. Например, когда с нами случается какое-нибудь событие – полёт на воздушном шаре, ныряние с аквалангом под воду, падение с велосипеда – мы с помощью мышления преобразуем это событие в краткий словесный рассказ. И потом каждый раз его воспроизводим.

Уловить закономерность – это тоже один из способов перекодировать информацию по Миллеру. Напри-

Художник Ольга Демидова

мер, сложно запомнить ряд цифр 23571113171923, но если заметить, что это записанные подряд первые 9 простых чисел, будет гораздо проще.

Кстати, был один человек, у которого учёные так и не смогли найти предел симультанности, – это обладатель феноменальной памяти Соломон Шерешевский. Он безошибочно воспроизводил таблицы цифр, длинные ряды чисел, слов или бессмысленных слогов, фразы незнакомого языка (и мог повторить их даже спустя много лет после того, как увидел или услышал). При этом Шерешевский плохо запоминал лица – они казались ему слишком изменчивыми. Часто он использовал такой приём: мысленно расставлял образы диктуемых ему слов вдоль любимой улицы, а когда нужно было их вспомнить, мысленно прогуливался по ней. Кстати, у него бывали ошибки, но не из-за памяти – если, например, он ставил белое яйцо у белой стены, то мог просто не заметить потом.[1]

А вот жена Джона Шепарда-Баррона, британского изобретателя, наоборот, страдала от низкой симультанности. Джон как-то похвастался, что изобрёл банкомат. И чтобы получить деньги, нужно ввести код всего из шести цифр. Миссис Шепард-Баррон пришла в ужас, сказав, что такое количество цифр она ни за что не запомнит. И бедному Джону пришлось уступить – он сделал код четырёхзначным.

Автор этой статьи должна признаться, что её симультанность тоже равна четырём. Мне очень трудно запомнить код подъезда, номер машины, таблицу умножения, имя учительницы. В школе мне часто ставили двойки, пока мне не помог папа. Он научил меня сочинять истории с ключевыми словами. Например, когда мне нужно было запомнить улицы Кремлёвского кольца, папа придумал такую абракадабру: «Москворецкие китайгородцы, до нового театра охочие, маханули через Боровицкий мост на Кремлёвскую набережную». Эти названия я могу безошибочно воспроизвести спустя 25 лет: Москворецкая набережная, Китайгородский проезд, Новая площадь, Театральный проезд, Охотный ряд, Моховая улица, Боровицкая площадь, Кремлёвская набережная.

[1] О способностях Соломона Шерешевского написал работавший с ним психолог А. Р. Лурия в своей «Маленькой книжке о большой памяти».

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СЮРПРИЗЫ

ПЛИТКИ И ЧИСЛА ХЕЕША

Хайдар Нурлигареев

Художник Алексей Вайнер

Перед вами несколько замощений плоскости одинаковыми плитками (рис. 1). В каждом из них все плитки – копии одного и того же многоугольника. Выложить замощение можно, например, так: начать с одной плитки и постепенно обкладывать её со всех сторон другими, слой за слоем, без зазоров и наложений. Так мы доберёмся до каждого участка плоскости.

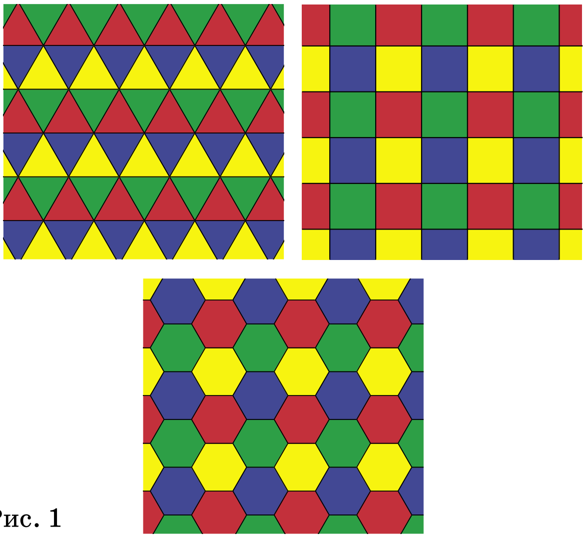


Рис. 1

Конечно, тут не любая плитка годится – например, копиями правильного пятиугольника не выложить даже первый слой (рис. 2).

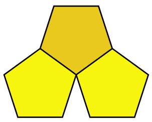


Рис. 2

А бывает ли, что несколько слоёв выкладываются, а дальше не получается? Даже если перекладывать уже выложенные слои всеми возможными способами, перебирая все варианты?

Так мы приходим к замечательному определению: *числом Хееша* плитки называется максимальное число слоёв, которое возможно выложить вокруг неё копиями этой плитки (при этом копии разрешается переворачивать).

У правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника число Хееша равно бесконечности. А у всех остальных правильных многоугольников число Хееша равно нулю – даже первый слой выложить нельзя. Оказывается, у наугад выбранной плитки число Хееша тоже обычно либо 0, либо бесконечность.

Но существуют ли многоугольники с числом Хееша 1, 2, 3, ...? До того как Генрих Хееш сформулировал эту задачу в 1968 году, была известна лишь одна плитка с числом Хееша, отличным от 0 и бесконечности (рис. 3). Плитка эта даже не многоугольник и впервые появилась в книге Вальтера Литцмана «Забавные и странные числа и формы» в 1922 году.

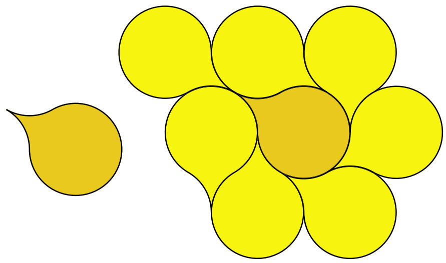


Рис. 3

Сам Хееш нашёл другую плитку с числом Хееша, равным 1: это 5-угольник, составленный из квадрата, правильного треугольника и половинки такого же треугольника (рис. 4).

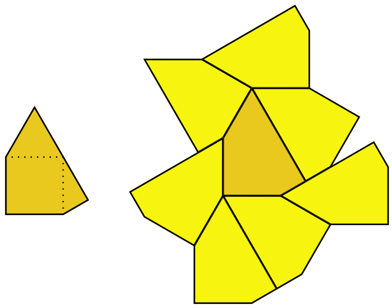


Рис. 4

Первый пример плитки с числом Хееша, равным 2, привела в 1991 году Энн Фонтен и даже построила бесконечно много таких плиток. Все они составлены из одинаковых квадратиков, то есть это фигурки полимино (рис. 5).

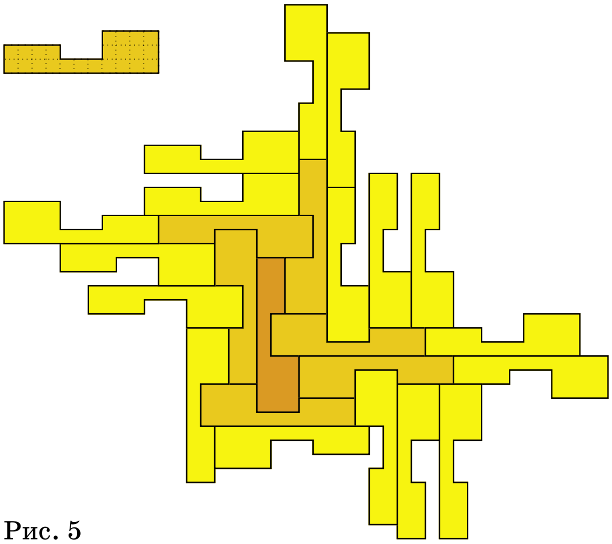


Рис. 5

В том же году Роберт Амманн добавил к правильному шестиугольнику два выступа, вырезал три таких же паза и получил фигуру с числом Хееша, равным 3 (рис. 6). Идея Амманна простая и изящная – надо искать плитку, у которой есть выступы и такие же пазы, но их разное количество.

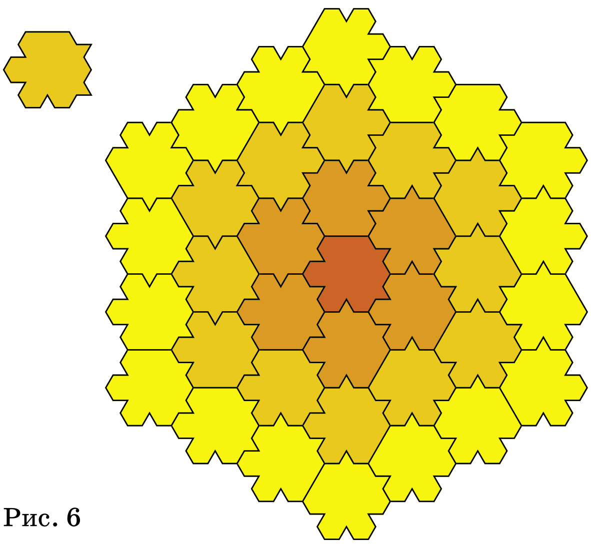


Рис. 6

Покажем, как работает эта идея, на примере плитки, найденной Кейси Манном в 2001 году. Она имеет вид четырёхклеточного прямоугольника с четырьмя выступами и пятью пазами (рис. 7). Объясним, почему число Хееша такой плитки не может быть слишком большим. Рассмотрим квадрат S, целиком покрытый копиями нашей плитки. Так как каждый паз может быть закрыт только таким же выступом, число пазов и выступов, попавших внутрь квадрата S, одно и то же. С другой стороны, число выступов внутри квадрата примерно равно его площади (в клетках) – так как у каждой клетки в плитке ровно один выступ, а число пазов примерно равно 5/4 его площади – так как в плитке на каждые 4 выступа приходится 5 пазов. Но при большом размере квадрата эти числа не могут быть равны.

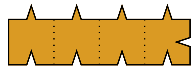


Рис. 7

Вот строгое рассуждение (его можно пропустить, если «и так всё понятно»). Пусть квадрат S размера $2n \times 2n$ полностью покрыт плитками. Для этого потребуется по крайней мере $\frac{2n \cdot 2n}{4} = n^2$ плиток. Всего у них $5n^2$ пазов, они все должны быть заполнены.

С другой стороны, эти пазы находятся внутри квадрата S' размера $2(n+4) \times 2(n+4)$ (рис. 8). Поэтому их заполняют выступы от не более чем $2(n+5) \cdot 2(n+5)$ клеток (мы учли, что тут могут потребоваться выступы и от клеток, примыкающих к квадрату S'). Тем самым, выступов максимум $2(n+5) \cdot 2(n+5) = 4n^2 + 40n + 100$. А при $n > 100$ заведомо выполнено неравенство $n^2 > 40n + 100$, откуда $5n^2 > 4n^2 + 40n + 100$, то есть пазов больше, чем выступов. Противоречие – все пазы не могут быть заполнены.

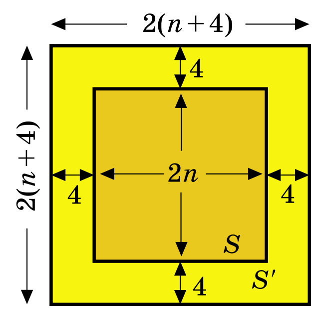


Рис. 8

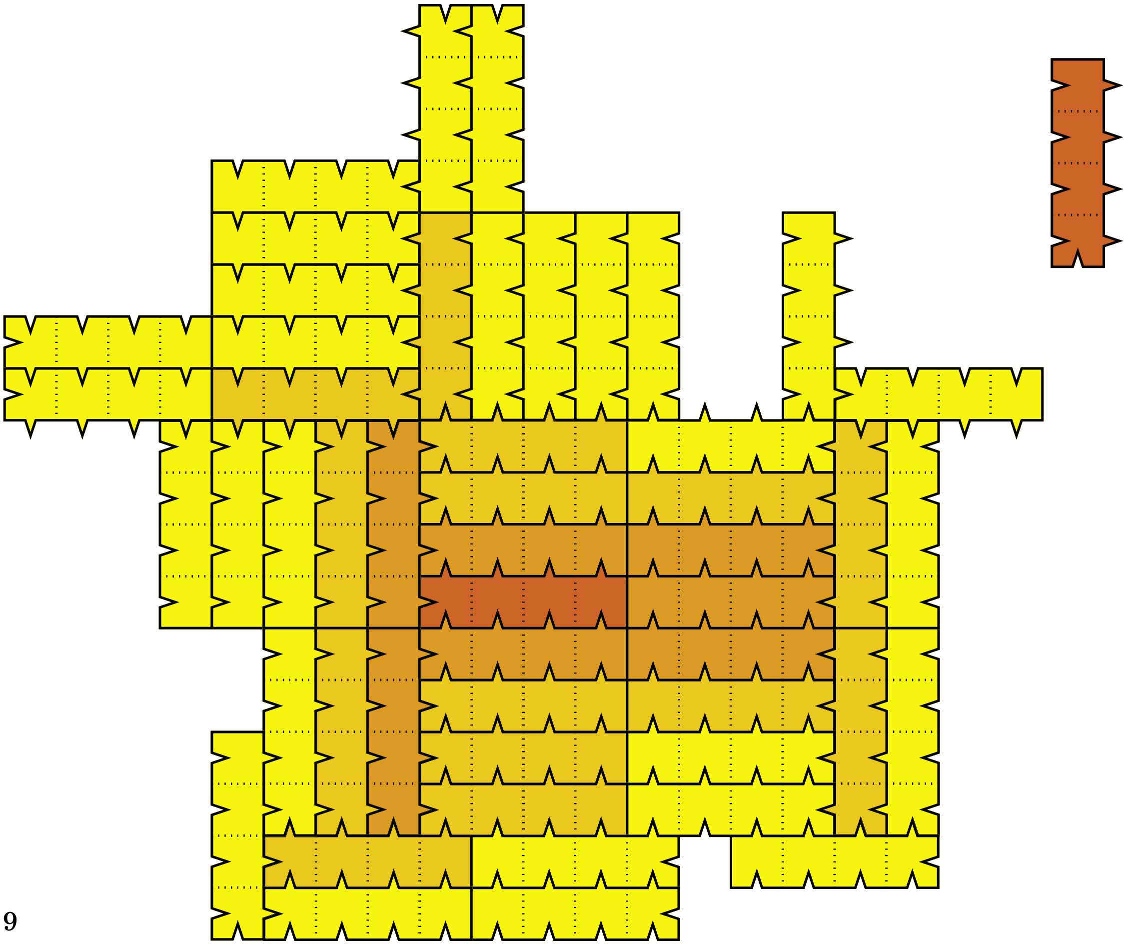


Рис. 9

Значит, число Хееша этой плитки конечно. На самом деле, оно равно 3 (рис. 9), но доказать это получается пока только компьютерным перебором.

Наиболее просты для исследования фигурки полимино, а также *полиамонды* и *полигексы*. Они тоже составлены из одинаковых «клеточек», примыкающих друг к другу сторонами, только в полиамондах клетка – это правильный треугольник, а в полигексах – правильный шестиугольник. Строя замощения из полимино, полиамондов или полигексов, мы как бы выкладываем их на свою «клетчатую» бумагу (рис. 1). На такой бумаге легко организовать компьютерный перебор. Так Кейси Манн нашёл полиамонд с числом Хееша, равным 3 (рис. 10).

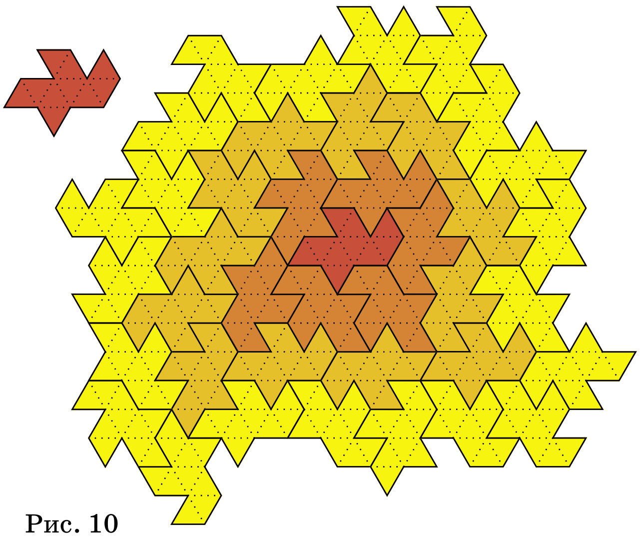


Рис. 10

Также Кейси Манну удалось получить несколько новых серий полимино и полигексов с выступами и пазами, у которых число Хееша конечно, но не равно нулю. А рекордсменом является полигекс Кейси Манна, составленный из пяти шестиугольников (с выступами и пазами) – его число Хееша равно пяти (рис. 11). На сегодняшний день это плитка с самым большим известным человечеству конечным числом Хееша.

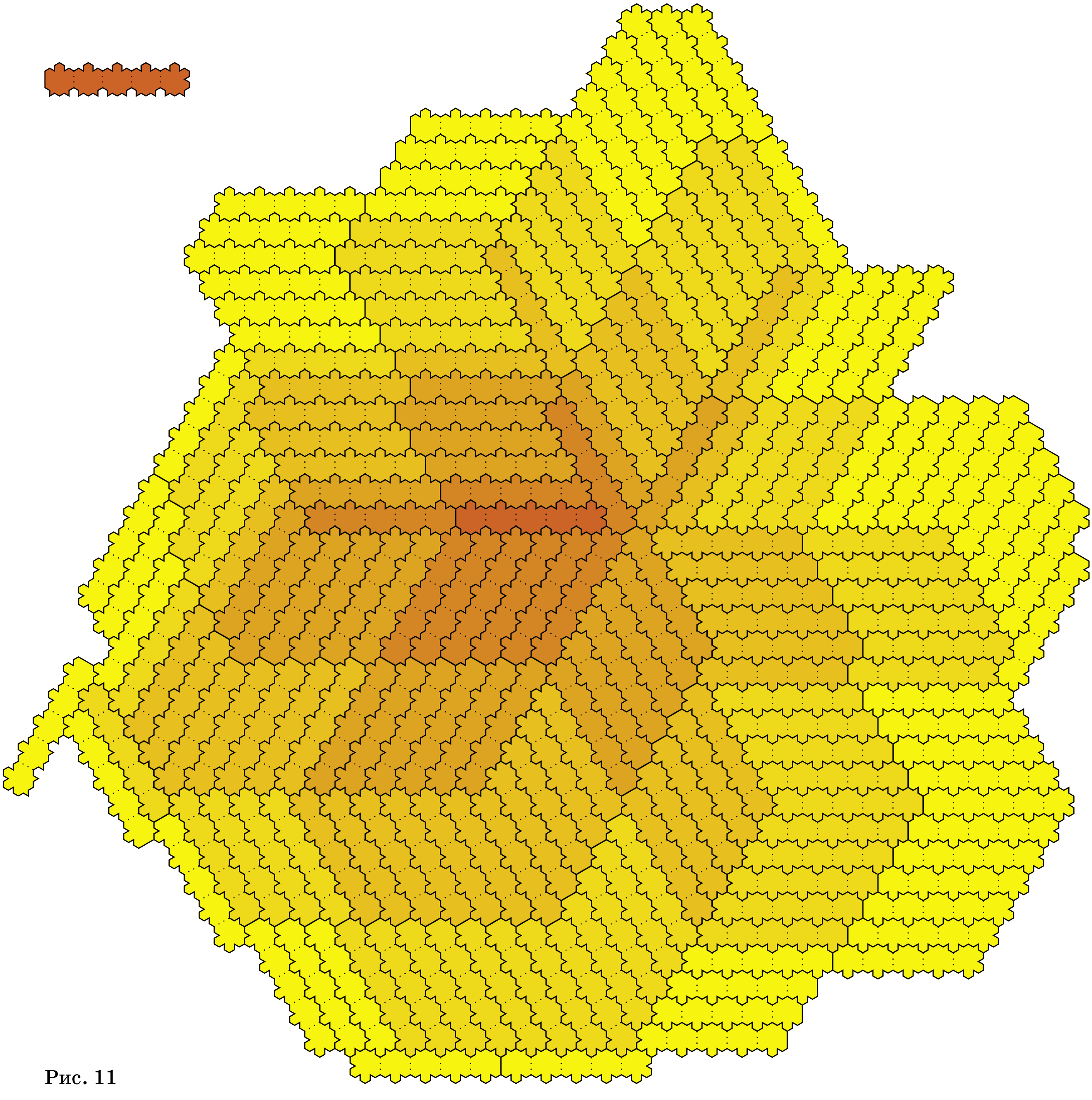


Рис. 11

Валерия Сирота

Песочная горка

Проходя мимо детской площадки, Мишка замедлил шаг. Малыши расползлись по углам, а в центре, у песочницы, шло недетское обсуждение. На углу деревянной рамы среди остатков былых куличиков лежал раскрытый номер «Квантика»[1]. Миша подошёл поближе и прочитал:

Задача 1. *Если аккуратно сыпать сверху сухой песок (из одной точки), получается ровная коническая горка. Измерьте зависимость высоты песчаной горки от радиуса её основания и нарисуйте график этой зависимости.*

– ...вязальной спицей мерить! – говорила Лера. – Я у бабушки одолжу. Протыкаем горку спицей, потом к линейке прикладываем, так можно и диаметр, и высоту...

– Не годится, это тоже разрушающее измерение, – отверг идею Дима. – Ты спицей проткнёшь, горка просядет.

– Ну и что? Пускай проседает. Мы же уже измерим...

– Так за-ви-си-мость же надо измерить! А не только для одной какой-то горки. Штук семь хотя бы разных радиусов, и для каждого – высоту. Что же ты, каждый раз новую горку насыпать будешь? Лучше так – насыплем маленькую, измерим, подсыплем ещё, опять измерим... Только аккуратно измерять надо...

– Я и говорю – штангенциркуль нужен! – вставила Оля, похоже, уже не в первый раз.

– И где ты найдёшь этот свой циркуль? – спросил Дима, который, видимо, не знал, что это такое.

– Такой большой – нигде, – уверенно и мрачно заявил Костя.

– А может, прямо на линейку сыпать?

– Нет, тоже не очень: вдруг у нас горка перекосится немного, и будет не ровно круг, а мы будем измерять только один радиус. Или даже не совсем радиус, если центр сдвинется. Неточно получится.

– А может, миллиметровку вниз постелить?

[1]Читатели «Квантика», угадайте – какой это был номер?

– Или бумагу, большой лист, и каждый раз обводить карандашиком край горки, а потом уж радиусы измерим. Или наоборот, заранее круги нарисовать и сыпать песок, пока они не заполнятся.

– А высоту как измерять? Поставить заранее линейку вертикально? Но как закрепить?

– И это тоже будет разрушающее... Линейка симметрию нарушит. Может, всё-таки спицей?

Тут Мишка вмешался в разговор.

– Эй вы, экспериментаторы! Бросайте своё бесполезное занятие! Я и так знаю, какой ответ должен получиться.

Экспериментаторы обиделись, но решение выслушали.

– Действительно, очень просто, – сказала Лера. – Как же это мы сами-то...

– А вы сразу стали думать, как измерить, а что именно собираетесь измерять – подумать забыли! – назидательно сказал Мишка.

– Ну и что! – сказал Дима. – А эксперимент всё равно нужен. Мы им твою теорию проверим. Вдруг всё не так на самом деле? И вообще, как ты без измерений коэффициент трения узнаешь?

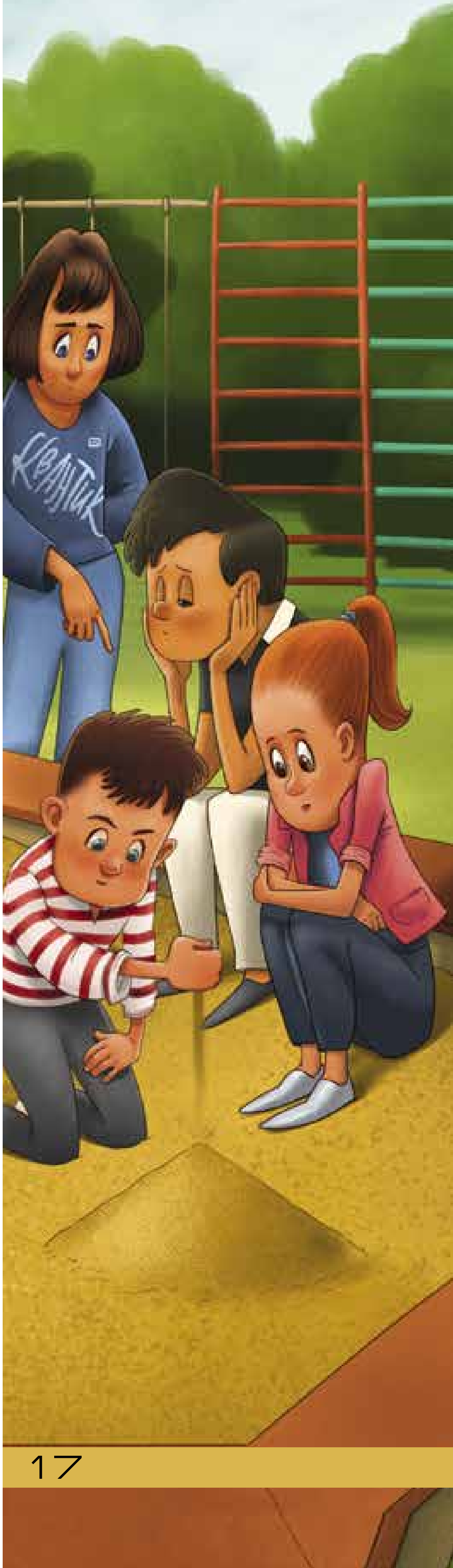
– Какой коэффициент трения?

– А ты читай внимательно, тут ещё задачи есть:

Задача 2. *А как зависит от радиуса основания горки вес насыпанного песка?*

Задача 3. *Для старших – тех, кто уже начал изучать физику: как из этих измерений найти коэффициент трения песка о песок?*

Здесь мы оставим эту компанию. Предлагаем вам повторить их подвиги: решить задачи теоретически, как Мишка, и понять, как должны выглядеть соответствующие графики, а потом проверить эти результаты экспериментально – или наоборот, сперва измерить и построить график, а потом уж разобраться, почему так. Рисовать график лучше на миллиметровке – будет гораздо точнее! Кстати, у ребят зависимость высоты горки от диаметра получилась не в точности такая, как предсказал Мишка, – никакой эксперимент не может быть абсолютно точным. Как вы думаете, для каких горок – больших или маленьких – точность их измерений была ниже?



Художник Мария Усеинова

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СКАЗКИ

Константин Кохась

МИНУС НА МИНУС

– Для кредитов, которые собирается выдавать наш заказчик коллега Спрудль, получается уравнение $x^2 = 5476$, – сообщил дятел Спятел, глядя в бумажку.

– Не умею я так быстро считать! – пожаловался таракан Кузька Бусеньке. – Многозначные числа вгоняют меня в сон.

– И не надо! – сказала Бусенька. – Каждый должен хорошо делать свою работу. Громоздкие вычисления – не твоя специализация. Зато с небольшими числами ты оперируешь очень шустро. Значит, тебе нужно заниматься *модулярной арифметикой*!

– Чем-чем?

– Вычислениями с остатками! Ты же умеешь складывать и умножать остатки?

– Конечно, умею.

– Вот и выбери небольшое число, причём лучше простое, например 7 или 13, и специализируйся на вычислениях с остатками по модулю 7 или 13.

– Что за шум, не отвлекайтесь! – неодобрительно сказал дятел Спятел. – Мы говорили о том, что эффективность кредитов коллеги Спрудля зависит от уравнения $x^2 = 5476$. Как и положено квадратному уравнению, оно имеет два корня: $x = 74$ и $x = -74$. Первый корень означает отвратительное обогащение нашего заказчика. А второй корень ведёт к его умеренному обнищанию. Какой же корень следует взять? Этот выбор мы предоставим… самому́ заказчику! Причём по умолчанию мы подсунем ему отрицательный корень! А поскольку в порыве энтузиазма коллега Спрудль жмёт на кнопки, не думая…

– Тебе не кажется, что это… не совсем честно? – усомнилась Огрыза.

– Это здорово! – тихонечко сказал Кузька Бусеньке. – Я обнаружил, что по модулю 7 уравнение $x^2 = 2$ тоже имеет два корня: $3^2 \equiv 2 \pmod 7$ и $4^2 \equiv 2 \pmod 7$. Получается, что один из этих корней положительный, а другой отрицательный?

– Зачем тебе отрицательные остатки? – прошептала Бусенька. – Если хочешь, ты их все можешь считать отрицательными – вместо 1, 2, 3, 4, 5, 6 запиши $-6, -5, -4, -3, -2, -1$, и готово!

– А складывать как?

– Как обычно: $(-5)+(-3)=-8\equiv-8+7\equiv-1 \pmod 7$. И умножать так же: $(-5)\cdot(-3)=15\equiv15-7\cdot3\equiv-6 \pmod 7$.

– Я думаю, нас не должно огорчать то, что счёт коллеги Спрудля начнёт стремительно уменьшаться, – уверенно сказал дятел Спятел. – Он своими собственными щупальцами распорядится переводить деньги в благотворительный фонд!

– Жульничество какое-то, – сказал Кузька. – Зачем это нужно?

– Ну мало ли… Хочешь, например, подсчитать, чему равно 6^{10}, и сразу получаешь ответ: $6^{10}\equiv(-1)^{10}\equiv$ $\equiv1 \pmod 7$.

– Я не вижу никаких плюсов от деятельности коллеги Спрудля! – продолжал нагнетать дятел Спятел. – Только минусы!

– Это какие-то фальшивые минусы, – сказал Кузька Бусеньке, – не может так быть, чтобы всё было отрицательным.

– Тогда назначь половину остатков отрицательными, а другую половину положительными: 1, 2, 3, –3, –2, –1.

– Выглядит поинтереснее, – согласился Кузька. – Хотя… что же это получается? Произведение положительных остатков 2 и 3 равно –1?!

– Какие-то у тебя сомнительные методы, – проворчала Огрыза.

– Это неправильные минусы, – сказал Кузька, – нам, насекомым, такие минусы не нужны! Мы ценим только настоящие минусы! – И Кузька уполз под диван поразмышлять о природе Настоящих Минусов.

* * *

Бурные дискуссии, посвящённые проблеме изведения счетов коллеги Спрудля, уже давно закончились, когда, наконец, Кузька вылез из-под дивана.

– Я провёл кучу вычислений и всё понял! – сообщил Кузька. – Решение, можно сказать, было на поверхности! Например, по модулю 7 уравнение $x^2=a$ имеет корни только при $a=1$, 2, 4 и не имеет корней при $a=3$, 5, 6. Знаете, что это значит? Что если рассматривать ненулевые остатки по модулю простого числа p, то ровно для половины всех остатков a уравнение $x^2=a$ имеет решения и для половины не имеет!

– Как это грустно, когда у задачи нет решения, – вздохнул дятел Спятел.

– А почему ровно в половине случаев оно всё же есть? – поинтересовалась Огрыза.

– Не знаю, – ответил Кузька, – я установил этот факт экспериментально.

– А я могу доказать, – сказала Бусенька. – Рассмотрим ненулевые остатки по простому модулю p. Поскольку $x^2=(-x)^2$, количество остатков, которые можно записать в виде x^2, не больше половины от числа всех остатков, то есть не больше $\frac{p-1}{2}$. С другой стороны, все остатки

$$1^2,\ 2^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

различны, потому что равенство $a^2 \equiv b^2 \pmod p$ возможно, только если $(a-b)(a+b) \equiv 0 \pmod p$, то есть при $a=b$ или при $a=-b$ (ведь p простое). Таким образом, количество остатков, которые можно записать в виде x^2, в точности равно $\frac{p-1}{2}$. А тогда тех, которые нельзя записать в таком виде, тоже $\frac{p-1}{2}$.

– Ну... эээ... ясно, – сказал Кузька и зевнул, – только не путай меня своими отрицательными остатками! У тебя неправильные минусы! А *правильно* определять отрицательный остаток вот как: отрицательными следует считать только те ненулевые остатки a, для которых уравнение $x^2=a$ не имеет решения. Например, по модулю 7 остатки 1, 2, 4 – положительные, а остатки 3, 5, 6 – отрицательные.

– Разве бывают неправильные определения? – спросил дятел Спятел.

– Бывают! – подтвердила Бусенька. – Когда придаём новый смысл уже существующему слову, этот смысл не должен слишком контрастировать с его другими смыслами.

– Чем же *это* определение правильное? – спросила Огрыза.

– Оно правильное, потому что для него выполняется... Правило Знаков! – воскликнул Кузька. – Произведение двух положительных или двух отрицательных остатков всегда положительно, а произведение положительного и отрицательного остатка – отрицательно. Я это проверил полным перебором.

– Потрясающе, – похвалила Огрыза. – А почему?

– То, что плюс на плюс будет плюс, – это понятно, – вмешался дятел Спятел. – Если $a = x^2$ и $b = y^2$ – положительные остатки, то и $ab = (xy)^2$ – тоже положительный остаток.

– Остальные случаи лишь чуточку хитрее, – сказала Бусенька. – Пусть x_1, x_2, ... – все положительные остатки, а y_1, y_2, ... – все отрицательные, и a – один из положительных остатков. Тогда все остатки ax_1, ax_2, ... , ay_1, ay_2, ... различны и не равны 0, поскольку по простому модулю p при ненулевых a равенство $au \equiv av \pmod p$ означает, что $u = v$. Но мы уже знаем, что ax_1, ax_2, ... положительны, и их ровно столько, сколько должно быть положительных остатков. Тогда все остальные остатки, то есть ay_1, ay_2, ..., отрицательны! Это и значит, что плюс на минус будет минус!

$$\underbrace{ax_1, ax_2, \ldots}_{\substack{\text{положительные,} \\ \text{и их ровно половина}}} \qquad \underbrace{ay_1, ay_2, \ldots}_{\substack{\text{значит, это в точности} \\ \text{все отрицательные}}}$$

Если же b – отрицательный остаток, то bx_1, bx_2,..., by_1, by_2,..., тоже все различны, причём, как мы доказали, bx_1, bx_2,... отрицательны. Так как этих остатков ровно половина, остальные остатки by_1, by_2,... положительны! То есть минус на минус будет плюс!

$$\underbrace{bx_1, bx_2, \ldots}_{\substack{\text{отрицательные,} \\ \text{и их ровно половина}}} \qquad \underbrace{by_1, by_2, \ldots}_{\substack{\text{значит, это в точности} \\ \text{все положительные}}}$$

– А остаток -1 положительный или отрицательный? – спросил дятел Спятел.

– Как повезёт, – ответил Кузька. – По модулю 7 уравнение $x^2 = -1$ не имеет решений, значит, отрицательный. А по модулю 13 положительный: $5^2 = 25 \equiv$ $\equiv -1 \pmod{13}$.

– Жаль, – сказала Огрыза.

– Очень жаль, – согласился Кузька. – Ведь если бы для всех простых p остаток -1 был отрицательным, то при решении квадратного уравнения $x^2 = a$ с положительным a один корень всегда оказывался бы положительным, а другой – отрицательным! Например, для $p = 7$ это так, и уравнение $x^2 = 2 \pmod 7$ имеет положительный корень 4 и отрицательный корень 3!

– Красотища! – сказала Бусенька. – Простые числа вида $4k + 3$ мне всегда нравились немножко больше остальных.

XXV турнир математических боёв имени А.П. Савина

Материал подготовил Александр Блинков

Ежегодно в конце июня школьники из многих городов съезжаются на летний турнир имени А. П. Савина. Приводим подборку избранных задач турнира 2019 года. После номера задачи указаны её автор и классы, в которых она предлагалась. Одна из задач Турнира (для 7 класса) помещена на задней обложке.

Избранные задачи

1. (*С.Токарев, 5–6*) В выражении ГУРУ + НОРА + + РАГУ + РУНО одинаковыми буквами зашифрованы одинаковые цифры, а разными – разные. Докажите, что эта сумма делится на трёхзначное число.

2. (*А.Шаповалов, 7–8*) Докажите, что для любого натурального n между числами n и $3n$ найдётся число, которое невозможно представить в виде суммы двух слагаемых с одинаковыми суммами цифр.

3. (*А. Блинков, 7*) В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны острые углы A и A_1, равны высоты, проведённые из вершин B и B_1, и равны медианы, проведённые из вершин C и C_1. Известно, что треугольники не равны. Может ли хотя бы один из них быть остроугольным?

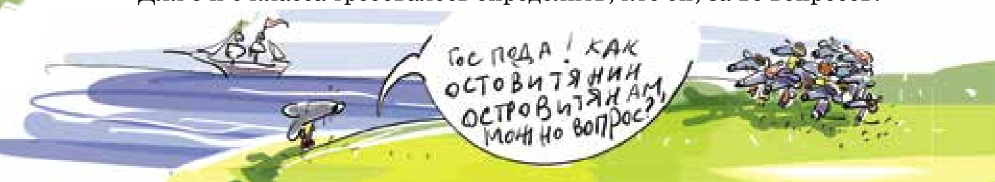
4. (*Г. Филипповский, 7–8*) На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена произвольная точка K. Пользуясь только линейкой без делений и карандашом, постройте какой-нибудь прямоугольник с вершиной K, вписанный в этот квадрат. (Каждая сторона квадрата должна содержать одну вершину прямоугольника.)

5. (*А.Пешнин, 7*) В треугольнике ABC провели высоту BH и биссектрису AL. Оказалось, что угол между прямыми BH и AL равен 30°. Найдите углы треугольника, если известно, что $2BH = AL + AB$.

6. (*М.Волчкевич, 8*) Дан параллелограмм $ABCD$. В треугольнике ABD проведены высоты BK и DM, H – точка их пересечения. Докажите, что прямые MK и CH перпендикулярны.

7. (*М.Хачатурян, 5–7**) На острове живут по шесть рыцарей, лжецов и монахов, причём все жители выглядят одинаково. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Если монаху задать вопрос, он находит в «Книге готовых ответов на все вопросы» точно такой же вопрос и отвечает так, как написано в ответе. Один островитянин забыл, кто есть кто, включая его самого. Задавая вопросы, требующие ответа «да» или «нет», он хочет выяснить, кто он: рыцарь, лжец или монах. Хватит ли ему 14 вопросов?

* Для 5 и 6 класса требовалось определить, кто он, за 15 вопросов.



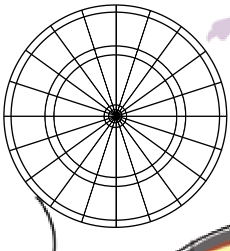
8. (*А.Грибалко, 5–8*) В каждой клетке прямоугольной таблицы стоит рыцарь или лжец. Каждый из них заявил, что в одной строке с ним находится больше рыцарей, чем в одном столбце. Докажите, что количество рыцарей делится на количество столбцов таблицы.

9. (*А.Шаповалов, 6–8*) В круговом коридоре аэропорта расположены 64 выхода на посадку. Каждая пара соседних выходов связана лентой, движущейся только в одну сторону. Известно, что ровно к одному выходу можно добраться от любого другого, пересаживаясь с ленты на ленту. За один вопрос можно про любую пару соседних выходов узнать, в какую сторону движется лента между ними. За какое наименьшее количество вопросов можно наверняка найти тот выход, к которому можно отовсюду доехать на ленте?

10. (*А.Шаповалов, 6*) Петя ставит на шахматную доску коня. Вася доски не видит. Своим ходом он обстреливает любые три клетки доски. Если на одной из них стоит конь, Вася выиграл, иначе Петя делает ход конём. Вася опять обстреливает три клетки, и т.д. Может ли Вася наверняка выиграть не более чем за 1000 ходов?

11. (*С. Токарев, 6–8*) Числа 1, 2, 3, ..., N записали по кругу в каком-то порядке. За одну операцию между каждыми двумя соседними числами записывают их полусумму, а исходные числа стирают. При каких N после нескольких таких операций снова могли получиться N целых чисел?

12. (*Н.Наконечный, 7–8*) Мишень для игры в дартс поделена на 20 секторов (см. рисунок). В каждом секторе записано число от 1 до 20, причём каждое число использовано один раз. Назовём мишень *правильной*, если любые два соседних сектора не имеют общего делителя, большего 1. Докажите, что количество различных правильных мишеней кратно 240. (Мишени, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.)



Художник Сергей Чуб

КОНКУРС
ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ

Материал подготовил Илья Иткин

Решения IV тура отправляйте по адресу **ruskonkurs@kvantik.org** не позднее 1 декабря. В письме кроме имени и фамилии укажите ваш город, а также школу и класс, где вы учитесь. За лучшее решение отдельных туров предусмотрены специальные премии. Предлагайте на конкурс задачи собственного сочинения – лучшие будут опубликованы. Так, автор задачи 18 – десятиклассник Тимур Меняльщиков.

Желаем успеха!

IV ТУР

16. После одного примечательного случая разбойник Мерзавио* очень полюбил игру слов. «Не буду-ка я больше спрашивать "Кошелёк или жизнь?", – решил он однажды. – Буду лучше спрашивать "АЛЬФА или БЕТА?": смысл, в общем, тот же самый, зато как красиво – слова отличаются только последней буквой». Как стал звучать вопрос Мерзавио?

И.Б. Иткин, О.А. Кузнецова

* Герой «Разбойничьей сказки» К. Чапека. О примечательном случае в жизни Мерзавио см. «Квантик» №8 за 2015 год, с. 27, 31.

17. В написанной в начале XVII века «Грамматике» Мелетия Смотрицкого о знаменитом византийском церковном деятеле Николае Студите говорится: «От юныя версты предаста его родителя учитися книгам». Что здесь означает слово «верста»? Какое слово современного русского языка вы можете привести в подтверждение? Кратко поясните свой ответ.

И.Б.Иткин, К.В.Литвинцева

18. Первоначальное значение каждого из этих слов можно передать примерно как «Ходил столько-то раз». Напишите любое из этих слов.

Т.Р. Меняльщиков

19. «Почему по-русски, когда хотят наотрез отказаться от какого-нибудь предложения, говорят "________________!"? Это же означает "Даю больше, добавляю!"!» – с удивлением спросил иностранец Джон, не очень давно начавший учить русский язык. Заполните пропуск.

С. И. Переверзева

20. Один маленький мальчик рассказывает: «Заглавные – это такие маленькие-маленькие послушные буковки…»

– Почему же ты думаешь, что заглавные буквы – маленькие и послушные?

– Ну как же: заглавные буквы – это такие, которые идут…

Закончите объяснение мальчика двумя словами.

Е.Б. Холодова

Художник Николай Крутиков

ДВА ФОТО ЗЕМЛИ – ОБА ЛИ НАСТОЯЩИЕ?

Перед вами два фото Земли, сделанные из космоса. Видно, что на левом фото Северная Америка существенно больше, чем на правом. Как такое может быть? Или одно фото фальшивое? (Оба фото в хорошем разрешении можно посмотреть в интернете: kvan.tk/big-marble, kvan.tk/small-marble)

Материал подготовил Алексей Воропаев

Художник Алексей Вайнер

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ, III ТУР

(«Квантик» № 7, 2019)

11. *Однажды Иван-царевич шёл по Измайловскому лесопарку и увидел знакомую ведьму.*

– Вы не подскажете, где закопан клад? – вежливо спросил Иван-царевич.

– Под высокой АЛЬФОЙ! – буркнула ведьма и исчезла.

Иван-царевич от досады чуть лопату не сломал: нет такого дерева – АЛЬФА, и слова такого нет! Если из слова АЛЬФА убрать одну букву, получится название лиственного дерева, если другую – наоборот, хвойного. Так и не пошёл клад искать.

Какое несуществующее слово мы заменили на АЛЬФУ?

Это «слово» – ***сосина***. Если убрать из него первую букву *с*, получится название лиственного дерева: *осина*; если убрать букву *и*, получится название хвойного дерева: *сосна*. В общем, Ивану-царевичу не повезло.

12. *Метатеза – это перестановка слогов или звуков в слове. Например, древнерусское слово* долонь *в результате метатезы превратилось в современное* ладонь. *А в некоторых русских говорах название некоего помещения в результате метатезы стало звучать так, что можно подумать, будто в нём производятся какие-то магические действия. Что это за помещение?*

Это помещение – ***кладовая*** (или ***кладовка***). В результате метатезы (перестановки) звуков *л* и *а* слово *кладовая* в некоторых говорах превратилось в *калдовая* и может восприниматься на слух как образованное от глагола *колдовать* (безударные *о* в этом глаголе, разумеется, произносятся как [а]).

13. *– И что же я значу? – спросил Корень.*

– «...Напрасно», – хором закричали Глагол, Существительное и Прилагательное.

– Ничего не «напрасно»! Наоборот: «Очень хорошо и с усердием»! – возмутились Другое Существительное и Другое Прилагательное.

Перечислите в правильном порядке все пять слов, участвовавших в споре.

Вопрос, спровоцировавший бурную дискуссию, задал корень *тщ-*. По-видимому, сам по себе этот корень значит что-то вроде «пытаться»; при этом в одной группе производных к этому значению добавляется значение «безуспешно, напрасно», а в другой – значение «старательно, с усердием». Первую группу в ходе дискуссии представляли слова ***тщиться***, ***тщета*** (или ***тщетность***) и ***тщетный***, вторую – слова ***тщание*** (или ***тщательность***) и ***тщательный***.

14. *Назовите два существительных, которые отличаются только указанием на разное количество, при этом одно из них означает «согласие», а другое – «лицемерие».*

Речь идёт о существительных ***единодушие*** и ***двоедушие***. Другой вариант ответа – *единомыслие* и *двоемыслие* – подходит несколько хуже, потому что слово *двоемыслие*, строго говоря, не несёт информации о том, как человек ведёт себя с окружающими.

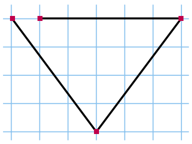
15. *Найдите русский глагол вида XXить, где X – некоторая последовательность букв.*

Самые распространённые глаголы, удовлетворяющие условию задачи, – это глаголы ***попоить*** и ***разразить***, к которым можно ещё добавить более редкие ***ввить*** и ***дододить***.

НАШ КОНКУРС, XII ТУР

(«Квантик» № 8, 2019)

56. *Кузнечик прыгает по узлам клетчатой плоскости. Он может перепрыгнуть из одного узла в другой, если расстояние между ними (по прямой) равно 5. В любой ли узел плоскости может попасть кузнечик?*



Ответ: да. Кузнечик может переместиться в соседний узел, сделав три прыжка длиной 5, как на рисунке. Действительно, косые прыжки на рисунке – гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4, и по теореме Пифагора они имеют длину 5. Такими сериями прыжков кузнечик может добраться до любого узла плоскости.

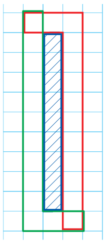
57. *Барон Мюнхгаузен составил квадратную таблицу умножения чисел от 1 до 100 – в каждой клетке таблицы 100×100 записал произведение номеров строки и столбца, в которых стоит эта клетка. Барон утверждает, что сумма всех полученных произведений – квадрат целого числа. Прав ли барон?*

Ответ: да. Сумма чисел в одном столбце, скажем, k-м, равна $k+2k+\ldots+100k=(1+\ldots+100)\cdot k$. Значит, сумма чисел во всех столбцах равна $(1+\ldots+100)\cdot1+(1+\ldots+100)\cdot2+\ldots+(1+\ldots+100)\times100=(1+\ldots+100)\cdot(1+\ldots+100)=(1+\ldots+100)^2$.

58. *Квантик и Ноутик играют на белой клетчатой доске 17×17. За ход надо закрасить в чёрный цвет состоящий из белых клеток многоугольник площади не более 9. Про-*

играет тот, кто не может сделать ход, начинает Ноутик. Кто из играющих может обеспечить себе победу и как ему играть?

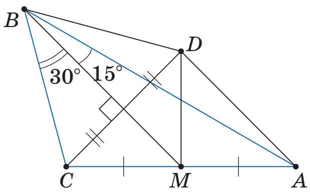
Ответ: Ноутик. Пусть Ноутик первым ходом закрасит прямоугольник 1×9 в центре доски, а дальше повторяет ходы Квантика центрально-симметрично, то есть закрашивает точно такой же многоугольник, получающийся поворотом доски на $180°$ относительно её центра. Ему всегда удастся это сделать, потому что никакой многоугольник Квантика не сможет занять две симметричные клетки. Действительно, если такой многоугольник нашёлся, возьмём ему симметричный (например, как на рисунке). Вместе они полностью окружают первый прямоугольник 1×9, а значит, покрывают суммарно хотя бы 24 клетки, что противоречит условию.



59. *На прямой отмечено несколько точек. За ход между каждой парой соседних точек ставится одно и то же количество новых точек: 3, 4 или 5 (для очередного хода можно выбирать какое-то одно из этих чисел). Может ли на прямой после нескольких таких ходов (не менее одного) оказаться ровно 333444555 отмеченных точек?*

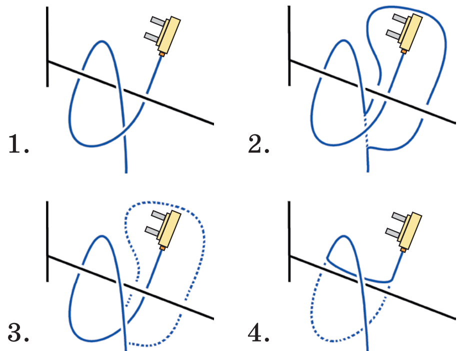
Ответ: нет. Покрасим самую левую отмеченную точку в белый цвет, а все остальные, в том числе новые точки, будем красить в чёрный. Тогда за ход число чёрных точек возрастает в 4, 5 или 6 раз. Но 333444554 не делится ни на 4, ни на 5, ни на 6 (проверьте!).

60. *Найдите углы треугольника, если его медиана образует со сторонами, выходящими из той же вершины, углы 15° и 30°.*



Ответ: $45°$, $105°$ и $30°$. Пусть в треугольнике ABC медиана BM образует со сторонами AB и BC углы $15°$ и $30°$ соответственно. Опустим из точки C на BM перпендикуляр и продлим на его длину, получив точку D. Треугольник CDB будет равносторонним, а CMD – равнобедренным. Значит, $AM = CM = DM$, тогда A, D, C лежат на одной окружности с центром в M, угол ADC опирается на диаметр, а значит, равен $90°$. Тогда в треугольнике ADB имеем: $\angle DBA = 15°$, $\angle ADB = 90° + 60°$, откуда $\angle DAB = 15°$, то есть $AD = DB = DC$. Тогда треугольник ADC – равнобедренный прямоугольный, откуда $\angle ACB = 45° + 60° = 105°$ и тем самым $\angle BAC = 30°$.

ЗАПУТАВШИЙСЯ ШНУР («Квантик» № 9, 2019)



ЕЩЁ ДАЛЬШЕ В МИКРОМИР: КВАРКИ

1. π^--мезон: $\bar{u}d$; K^+-мезон: $u\bar{s}$.

2. Нейтрон: udd. Антинейтрон – не то же самое, что нейтрон: $\bar{u}\bar{d}\bar{d}$.

3. Сигма-минус-гиперон, Σ^-: dds, анти-сигма-минус-гиперон: $\bar{d}\bar{d}\bar{s}$. Другой гиперон с зарядом +1 – сигма-плюс-гиперон, Σ^+: uus.

ПЕСОЧНАЯ ГОРКА

1. Мишка использовал идею подобия. Физические причины, определяющие форму горки, не зависят от её размера – по крайней мере, для не очень больших горок, которые можно сделать в песочнице. Поэтому все горки подобны друг другу – у всех «крутизна склона» примерно одна и та же, все размеры отличаются в одно и то же число раз. Значит, высота прямо пропорциональна радиусу: на графике экспериментальные точки расположатся вдоль прямой линии, примерно как на рисунке 1.

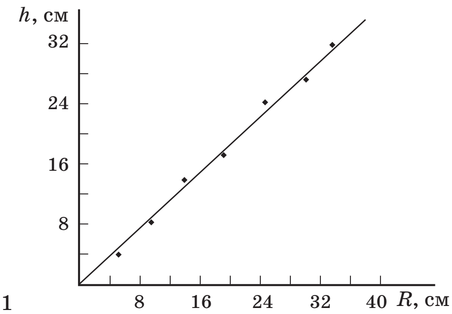


Рис. 1

2. Чтобы теоретически определить зависимость веса песка от радиуса горки, опять нужна идея подобия. Если одна горка по всем измерениям больше другой в 2 раза, то можно разделить их обе на воображаемые маленькие кубики (а по краешкам – другие кусочки, например половинки кубиков), и сторона каждого кубика первой горки будет больше стороны соответствующего кубика второй в 2 раза. А объём – в $2^3=8$ раз. Можно заменить в этом рассуждении 2 на R: объём любой горки прямо пропорционален кубу её радиуса (или высоты), $V=c\cdot R^3$. Чтобы найти массу, умножим объём на плотность песка, получим $M=m\cdot R^3$. Здесь m и c – некоторые числа. Если у вас есть весы, можно это тоже проверить экспериментально и, построив график, сравнить его с теоретическим предсказанием: коэффициент m можно определить по одной из точек.

3. Ответ: от 0,7 до 0,9, в зависимости от степени сухости и сорта песка.

На песчинку, лежащую на склоне, действуют три силы: сила притяжения Земли (mg), направленная вниз, сила реакции опоры (N), направленная перпендикулярно поверхности, и сила трения ($F_{тр}$) – вдоль поверхности. (На самом деле сумма двух последних – это одна сила, действующая на песчинку со стороны остального песка.) Коэффициент трения – это отношение $\mu=F_{тр}/N$. Чтобы песчинка не двигалась, сумма всех сил должна быть равна нулю, а значит, сумма векторов N и $F_{тр}$ должна быть направлена вертикально вверх.

Угол между N и вертикалью – такой же, как угол наклона горки (они получаются друг из друга поворотом картинки на 90°). Из подобия голубого и жёлтого треугольников получаем $\mu=F_{тр}/N=h/R$ – коэффициент трения равен отношению высоты горки к радиусу её основания. Его можно подсчитать для какой-нибудь одной из точек графика (одной горки) – но точнее взять среднее по всем измеренным горкам.

Между прочим, проведённая «посередине между точками» прямая линия на рисунке 1 имеет примерно тот же угол наклона, что и – в среднем – склоны песочных горок. Поэтому бежевый треугольник на рисунке 3 тоже подобен голубому и жёлтому на рисунке 2, а значит, можно измерить коэффициент трения и по нему; получится точнее, чем по одной какой-то точке.

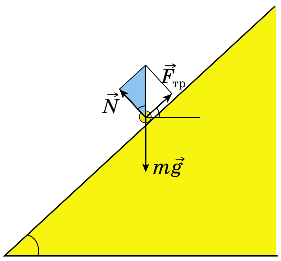


Рис. 2

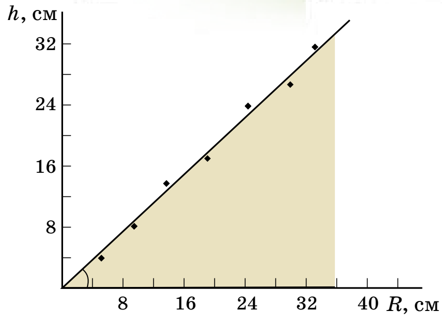


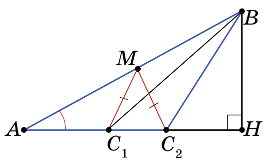
Рис. 3

XXV ТУРНИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ БОЁВ ИМЕНИ А.П.САВИНА

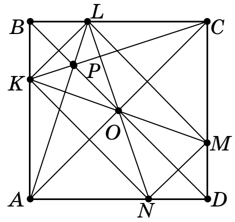
1. Преобразуем: ГУРУ + НОРА + РАГУ + +РУНО = 100ГУ + РУ + 100НО + РА + 100РА + +ГУ + 100РУ + НО = (ГУ + РУ + РА + НО) · 101. Так как в скобках стоит натуральное число, то заданная сумма делится на 101.

2. При $n>6$ между n и $3n$ найдётся число k, у которого сумма цифр нечётна и все цифры, кроме первой, – девятки: берём число с тем же количеством знаков, что и у $n+1$, и либо сохраняем первую цифру (остальные цифры – девятки), либо первую цифру увеличиваем на 1 (остальные цифры – девятки); оба эти числа меньше чем $3n$. Пусть мы представили k в виде суммы двух слагаемых с одинаковыми суммами цифр. Тогда сумма цифр у k равна сумме сумм цифр слагаемых (потому что не может быть переходов через десяток). Но два равных числа не могут в сумме дать нечётную сумму цифр.

3. Ответ: не может. Рассмотрим задачу на построение треугольника по следующим данным: острому углу A, высоте BH и медиане CM. Из условия следует, что она должна иметь два решения. При этом прямоугольный треугольник ABH по катету и острому углу восстанавливается однозначно. Вершина C должна находиться от середины M стороны AB на расстоянии, равном заданной медиане, то есть окружность с центром M и радиусом, равным медиане, должна пересечь отрезок AH в двух внутренних точках C_1 и C_2. Действительно, C_1 и C_2 симметричны относительно середины AH. Тогда оба треугольника ABC_1 и ABC_2 обязательно будут тупоугольными.



4. Пусть искомый прямоугольник построен, тогда его соседние вершины симметричны относительно диагоналей квадрата, а противоположные вершины симметричны относительно

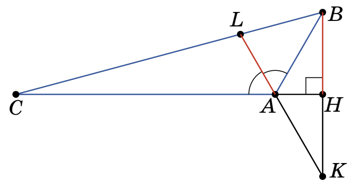


центра квадрата. Отсюда следует, например, такое построение. Проведём

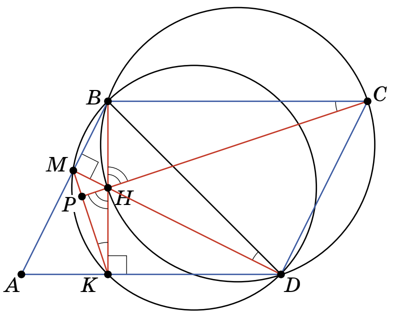
1) диагонали квадрата, O – точка их пересечения;
2) прямую KO до пересечения со стороной CD в точке M;
3) прямую CK до пересечения с BD в точке P;
4) прямую AP до пересечения с BC в точке L;
5) прямую LO до пересечения с AD в точке N.

Прямоугольник $KLMN$ – искомый.

5. Ответ: $\angle A = 120°$, $\angle B = 45°$, $\angle C = 15°$. Из условия следует, что угол между прямыми AL и AC равен $60°$, то есть $\angle A = 120°$. Пусть прямые AL и BH пересекаются в точке K. Тогда $\angle HAK = \angle CAL = 60° = \angle HAB$, то есть точки B и K симметричны относительно прямой AC. По условию $BK = 2BH = AL + AB = LK$, значит, $\angle KBL = \angle KLB = 75°$, а $\angle B = 75° - 30° = 45°$.



6. Пусть прямые MK и CH пересекаются в точке P (см. рисунок). Пусть $\angle PKH = \alpha$, $\angle PHK = \angle CHB = \beta$. Докажем, что $\alpha + \beta = 90°$, откуда и будет следовать утверждение задачи.



Так как $\angle BMD = \angle BKD = 90°$, то $BMKD$ – вписанный четырёхугольник. Следовательно, $\angle BDM = \angle BKM = \alpha$. Кроме того, $\angle CBH = \angle CDH = 90°$, значит, $BCDH$ – также вписанный четырёхугольник. Поэтому $\angle BCH = \angle BDM = \alpha$. Из треугольника BCH получим, что $\alpha + \beta = 90°$, что и требовалось.

7. Ответ: да. Пусть забывший, кто он (назовём его Васей), последовательно задаёт островитянам вопрос «Верно ли, что дважды два – четыре?», пока не получит 7 одинаковых ответов. Так как рыцари и лжецы дают на этот вопрос разные ответы, и каждых на острове не более шести, то среди семи одинаково ответивших островитян есть монахи. А так как все монахи отвечают одинаково, то среди ответивших иначе их нет. Назовём группу людей, ответивших иначе, «чистой». Далее заметим, что, во-первых, мы знаем, из лжецов или рыцарей состоит «чистая» группа, а во-вторых, зная, кто перед нами (рыцарь или лжец), и задав два вопроса: «Я рыцарь?» и «Я лжец?» (и заменив ответы на противоположные, если разговариваем со лжецом), Вася сможет узнать, кто он. Если в «чистой» группе никого не оказалось, пусть Вася задаёт вопросы дальше, пытаясь всё же найти человека в эту группу. Возможны три случая.

1) Вася задаст 12 вопросов и так и не найдёт никого в чистую группу, продолжая получать один и тот же ответ. Но тогда, если эти одинаковые ответы были «да», то это 6 рыцарей и 6 монахов, и больше их на острове нет, следовательно, Вася – лжец. Аналогично, если это ответы «нет», то Вася – рыцарь.

2) Если в «чистой» группе уже было от 1 до 5 человек, то задано не более 12 вопросов, и за два вопроса представителю чистой группы Вася узнает о себе, кто он.

3) Если в чистой группе 6 человек, и это рыцари, то, во-первых, рыцарей на острове больше нет, а во-вторых, задано ровно 13 вопросов. Значит, Вася – не рыцарь, и достаточно ещё только одного вопроса рыцарю: «Я лжец?». В случае отрицательного ответа Вася – монах, иначе – лжец. Аналогично, если это лжецы, то Вася – не лжец, и достаточно спросить лжеца: «Я рыцарь?». В случае положительного ответа Вася монах, иначе – рыцарь.

Более шести человек в «чистой» группе быть не может (по принципу Дирихле).

Придумайте, как Васе узнать, кто он, задав не более 13 вопросов.

8. Если рыцарей нет, то требуемое утверждение выполняется. Если они есть, то найдём столбец, в котором их количество максимально (возможно, не единственный). Рассмотрим каждого из рыцарей этого столбца. В строке, где он стоит, рыцарей больше, чем в любом столбце таблицы, а тогда лжецов в этой строке нет – иначе такой лжец говорил бы правду. То есть, все эти строки состоят из одних рыцарей. Других рыцарей в таблице нет (иначе это противоречит максимальности рыцарей в выбранном столбце). Следовательно, количество рыцарей делится на количество столбцов.

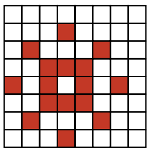
9. Ответ: за 63 вопроса. Назовём искомый выход «главным».

Оценка. Пусть мы проверили 62 ленты и оказалось, что все они движутся по часовой стрелке. Для оставшихся двух лент есть по меньшей мере две возможности: 1) первая движется по часовой стрелке, вторая – против; 2) наоборот. В обоих случаях выход, к которому везёт лента против часовой стрелки, будет единственным «главным». Но для случаев 1) и 2) это разные выходы, так что 62 вопросов недостаточно.

Алгоритм. Спросим про любую ленту. Пусть, например, она движется по часовой стрелке. Идя от ленты по часовой стрелке, последовательно спрашиваем про очередные ленты, пока не найдём ленту, движущуюся навстречу предыдущей. Возможны два случая:

1) мы нашли встречную ленту не более, чем за 63 вопроса. Тогда от выхода на стыке встречающихся лент доехать никуда нельзя, значит, он и есть «главный»;

2) мы проверили 63 ленты подряд, и все они движутся по часовой стрелке. Тогда последняя лента не может тоже двигаться по часовой, иначе по кругу можно от любого выхода доехать до любого другого, что противоречит условию единственности. Значит, 64-я (не проверенная) лента движется навстречу остальным, и «главным» будет выход на стыке 63-й и 64-й лент.



10. Ответ: нет. Пусть Петя на ход вперёд знает, какие клетки обстреляет Вася. Покрасим 16 клеток доски в красный цвет, как показано на рисунке. Тогда сначала Петя ставит коня на красную клетку, которую Вася первым ходом не обстреляет. Заметим, что из каждой красной клетки можно сделать ход на 4 другие красные клетки. Петя ходит на ту из них, которую Вася следующим ходом не обстреляет. Действуя так, Петя предотвратит победу Васи в течение любого числа ходов.

11. Ответ: при $N = 4k$. Заметим, что общая сумма чисел, очевидно, не меняется. Будем рассуждать «с конца». Пусть у нас получились целые числа. Тогда за один шаг до этого суммы во всех парах соседей были чётными. Рассмотрим несколько случаев.

1) $N = 4k + 2$. Тогда числа разбиваются на пары, в каждой паре сумма чётна. Но сумма всех исходных чисел нечётна. Противоречие.

2) $N = 2k + 1$. Покажем, что если все суммы чётные, то все числа – целые. Просуммировав все суммы пар чисел, получим чётное число, равное удвоенной сумме всех чисел. Значит, сумма всех чисел – целая. С другой стороны, сумма всех чисел, кроме одного выбранного, разбивается на k чётных сумм. Тогда выбранное число тоже целое. Мы могли выбрать любое число, значит, все числа целые.

Итак, если на каком-то шаге числа все получились целыми, то так было и шагом раньше, и на всех предыдущих шагах. Но уже после первого шага найдётся нецелое число, потому что найдётся пара соседей разной чётности.

3) $N = 4k$. Существует пример. Расставим числа по возрастанию: 1, 2, 3, ..., $4k$. Тогда на втором шаге все числа снова станут целыми.

12. Заметим, что числа 1, 11, 13, 17 и 19 не имеют общих делителей ни с какими другими расставленными числами. Из каждой правильной мишени перестановками чисел 1, 11, 13, 17, 19 и симметрией относительно вертикальной прямой можно получить $5!\cdot 2 = 240$ правильных мишеней. Все эти мишени различны: действительно, пусть две получившиеся мишени отличаются только поворотом. Тогда в них ориентации треугольника 2 3 4 должны совпадать, значит, если симметрия была использована при получении одной из мишеней, то и при получении второй она также использовалась. Отразив, если нужно, мишень, сведём к случаю, когда мишени получены из одной только перестановками пяти чисел, а такие мишени не получаются друг из друга поворотом. Значит, общее количество правильных мишеней кратно 240.

ДВА ФОТО ЗЕМЛИ – ОБА ЛИ НАСТОЯЩИЕ?

Оба фото настоящие, но сделаны *с разного расстояния* от Земли. На фото с большой Северной Америкой Земля существенно ближе к наблюдателю, но ещё «вся попадает в объектив». Из-за трёхмерности и шарообразности Земли мы по-прежнему видим шар, но реально многое по краям уже скрылось из виду из-за другого угла обзора – вот Америка и занимает бóльшую долю. Заметим ещё, что левое фото склеено из нескольких – наподобие того, как делают панорамные снимки. Так проще, чем отправлять в космос хитрый фотоаппарат «рыбий глаз» для фото с большим углом обзора.

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Высылайте решения задач II тура, с которыми справитесь, не позднее 1 ноября в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

II ТУР

6. Каких чисел, все цифры которых различны, больше: девятизначных или десятизначных?

7. У Квантика есть две квадратные шоколадки, первая – размером 10×10, вторая – размером 11×11. Чтобы разломать первую шоколадку на дольки 1×1, Квантику требуется 1 минута и 39 секунд. Какое время ему потребуется, чтобы разломать на дольки 1×1 вторую шоколадку? На каждый разлом Квантик тратит одно и то же время и за раз ломает какой-то один из имеющихся кусков на две части.

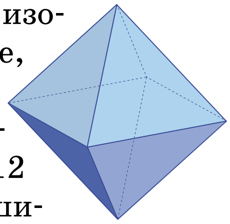
Авторы: Григорий Гальперин (6, 7), Игорь Акулич (8,10), Александр Перепечко (9)

8. Барон Мюнхгаузен рассказывал:

– Я сумел разрезать произвольный треугольник на две части, а потом каждую из них разрезал на 7 равных частей.

Могут ли слова барона быть правдой?

9. Многогранник, изображённый на рисунке, называется октаэдром; у него 6 вершин, 8 треугольных граней и 12 рёбер. В каждой вершине октаэдра поместили лампочку и зажгли одну из них. Далее, за ход можно выбрать любую грань и изменить состояние (потушить, если горит, и зажечь, если не горит) всех лампочек на ней. Можно ли за несколько ходов зажечь все лампочки?



10. Возьмём любое натуральное число, например, 2019. Составим второе число, которое показывает, сколько и каких цифр (в порядке возрастания) содержит исходное число. Получится 10111219, что означает «один нуль, одна единица, одна двойка и одна девятка». На основе второго числа по тому же принципу образуем третье число 10511219, потом – четвёртое 1041121519, и т. д.

а) Квантик убеждён, что с какого бы числа ни начать, в получившейся последовательности какое-то число непременно встретится дважды. Ноутик считает, что не обязательно – возможна последовательность, в которой все числа различны. Кто прав?

б) Могут ли в такой последовательности встретиться два одинаковых числа подряд?

Художник Николай Крутиков

КАК ПРОВЕСТИ ГРАНИЦЫ?

К озеру, имеющему форму выпуклого четырёхугольника, примыкают территории четырёх стран, как показано на картинке. Нарисуйте границы их территориальных вод. Каждая точка озера должна принадлежать той же стране, что и ближайшая к этой точке точка берега. (Лучше всего скопировать рисунок на бумагу и рисовать там.)

Автор Алексей Заславский • Художник Екатерина Ладатко

ISSN 2227-7986

19010