Математический кружок

Егор Бакаев

Квадраты на клетчатой бумаге

В «Квантике» №7 за этот год речь шла о треугольниках и других многоугольниках на клетчатой бумаге. Теперь мы отдельно рассмотрим квадраты и их площадь. Начнём с четырёх задач для самостоятельного решения (ответы см. в конце журнала).

1. На рисунке 1 отмечено 12 точек. Какие квадраты с вершинами в указанных точках можно нарисовать? Постарайтесь найти все 11 квадратов!

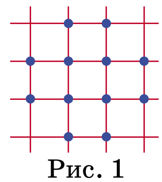


Рис. 1

2. Клетчатая плоскость, знакомая всем по школьной тетради, состоит из квадратных клеток. Вершины этих клеток также называют *узлами сетки*. Как вы думаете, почему?

Какие квадраты можно нарисовать с вершинами в узлах сетки? Например, те, у которых площадь – квадрат целого числа (1, 4, 9, 16, 25 клеток и т.д.): просто проводя стороны по линиям. А если проводить стороны не по сетке, как, например, в следующей задаче?

3. Нарисуйте на клетчатом листе квадрат с вершинами в узлах сетки и площадью а) 2; б) 5; в) 13 клеток.

Чтобы найти площадь фигуры, полезно бывает разрезать её по линиям сетки на прямоугольники и прямоугольные треугольники. Чтобы потом проще было догадаться, как в общем виде выражать площадь квадрата, предлагаем сначала придумать такие разрезания на конкретных примерах:

4. Составьте квадрат из четырёх прямоугольных треугольников с катетами 2 и 3 и ...

а) ... квадрата площади 1;

б) ... квадрата площади 13;

в) ... двух квадратов, площади которых 4 и 9.

Указание. Квадрат какой площади должен получиться?

В предыдущих задачах мы не заостряли внимания на том, почему эти фигуры действительно квадраты. Теперь мы обсудим это подробнее.

5. Нарисуйте квадрат со стороной, изображённой на рис. 2, *а*, и найдите его площадь.

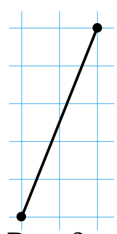


Рис. 2, *а*

Решение. Для начала вспомним, что такое квадрат. Это четырёхугольник, у которого все стороны равны и все углы прямые. Значит, нужно провести сторону, равную и перпендикулярную данной. Для этого возьмём прямоугольник, для которого данный отрезок AB служит диагональю и повернём на 90° вокруг точки B (рис. 2, *б*). При этом повороте вся сетка перейдёт в себя (вертикальные линии – в горизонтальные, и наоборот). Значит, и узел A перейдёт в какой-то узел C. (Можно это объяснить и по-другому, рассмотрев равные прямоугольные треугольники.) Итак, построена ещё одна вершина квадрата.

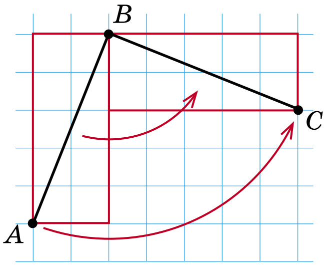


Рис. 2, *б*

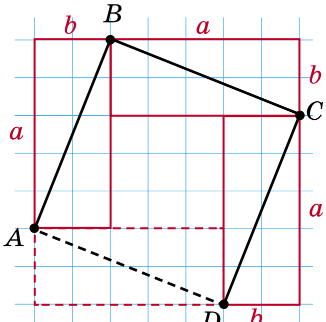


Рис. 2, *в*

Повторив эту процедуру для отрезка BC, получим четвёртую вершину D (рис. 2, *в*). Длины сторон прямоугольника с диагональю AB обозначим как a и b. Заметим, что вся эта конструкция вписывается в квадрат со стороной $a+b$. Тогда видно, что между A и D помещается ещё один прямоугольник, равный трём уже имеющимся. Значит, AD получается из CD поворотом на 90°, так что все стороны и углы $ABCD$ равны, то есть это квадрат. Эти рассуждения можно провести для любых a и b, а не только равных 5 и 2.

Теперь найдём площадь $ABCD$. Из той же конструкции видно, что чтобы дополнить $ABCD$ до квадрата площади $(a+b)^2$, надо добавить к нему 4 равных прямоугольных треугольника, каждый площади $\frac{ab}{2}$. Значит, площадь $ABCD$ равна $(a+b)^2-2ab$. Подставив конкретные стороны прямоугольника ($a=5$, $b=2$), получим, что площадь $ABCD$ равна 29.

Мы научились находить площадь квадрата с данной стороной. Это помогает сравнивать длины отрезков:

6. а) Какой из двух отрезков на рисунке 3 длиннее?

б) Нарисуйте отрезок с вершинами в узлах сетки, который короче одного из них и длиннее другого.

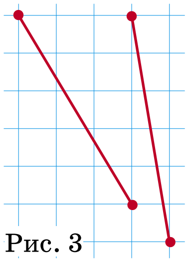
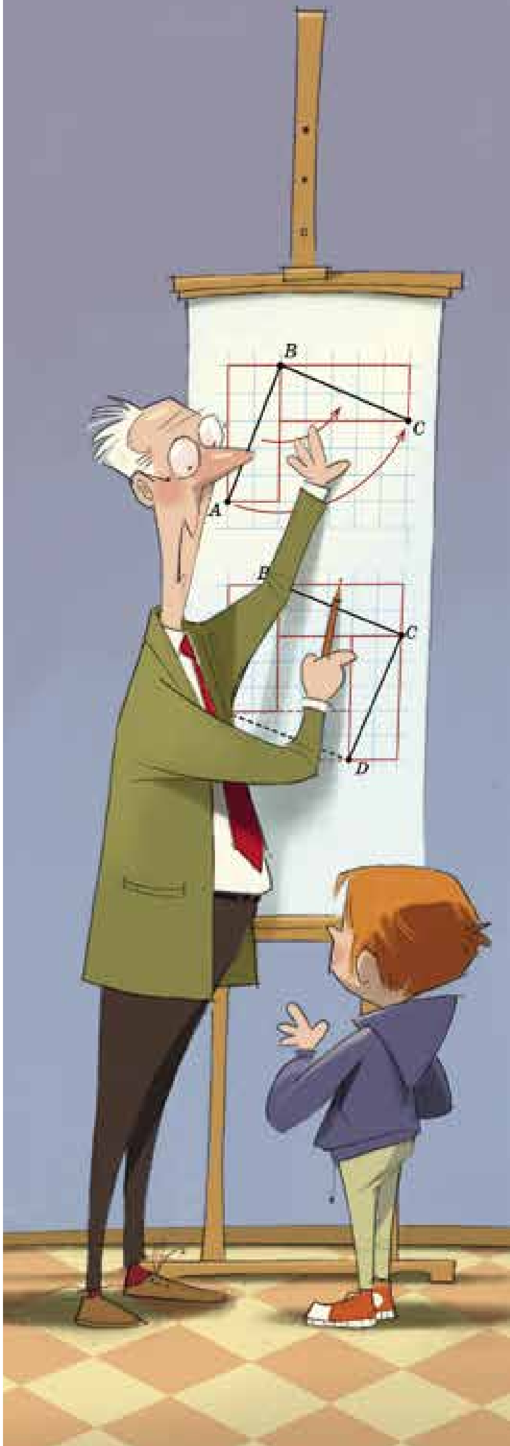
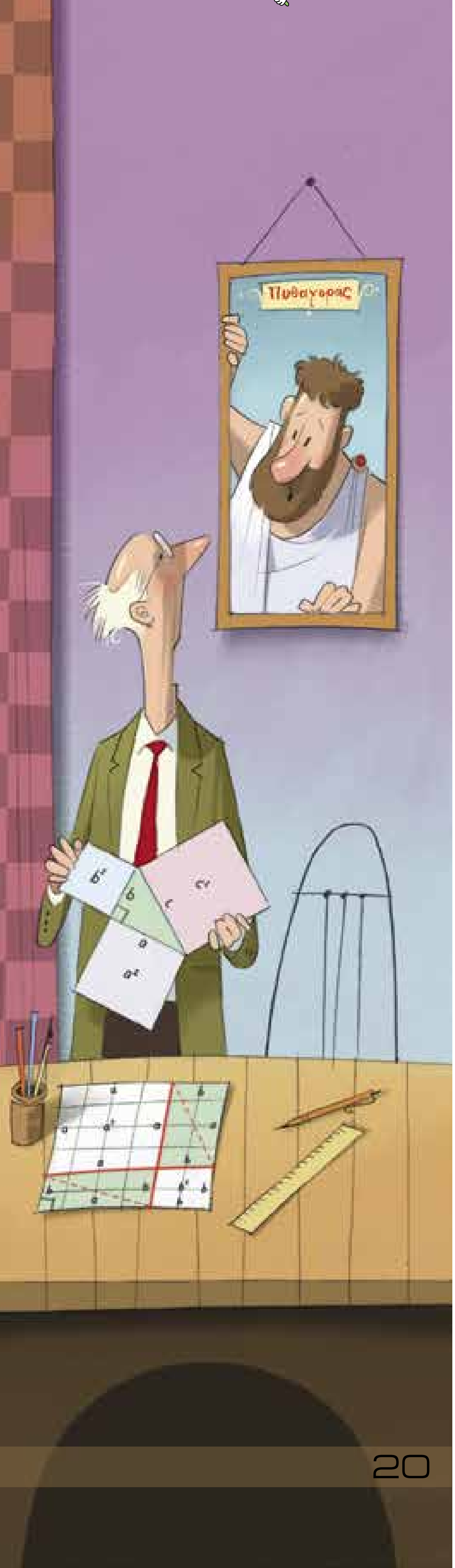


Рис. 3





Решение. а) Можно построить квадраты с такими сторонами и найти их площади. Нарисуйте их и убедитесь, что они будут равны 34 и 37. Чем больше сторона квадрата, тем больше его площадь. Значит, правый отрезок длиннее. Можно найти его длину a: раз площадь квадрата равна 37, то $a^2 = 37$, то есть $a = \sqrt{37}$. Над пунктом б) предлагаем подумать самостоятельно.

Находить длины таких отрезков, не рисуя квадраты, позволяет теорема Пифагора:

7. *Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах.* Иными словами, *в прямоугольном треугольнике с катетами a и b и гипотенузой c выполняется равенство* $a^2 + b^2 = c^2$ (рис. 4, *а*).

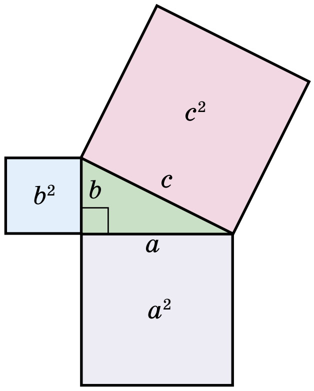


Рис. 4, *а*

Доказательство. Достроим данный треугольник до прямоугольника и повторим построения из решения задачи 5 (рис. 4, *б*). Получим квадрат со стороной $a + b$, в который вписан квадрат со стороной c. Как и в задаче 5, площадь квадрата со стороной c можно вычислить по формуле $(a + b)^2 - 2ab$. Раскроем скобки: $a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2$. Таким образом, формула $a^2 + b^2 = c^2$ доказана!

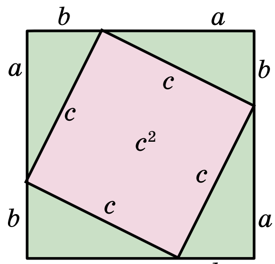


Рис. 4, *б*

Заметим, что формулу раскрытия скобок $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ можно доказать графически, тоже с помощью площади (рис. 4, *в*). Это даёт доказательство теоремы Пифагора без формул, просто сопоставлением двух рисунков 4, *б* и 4, *в*: на них показаны два способа собрать квадрат со стороной $a + b$ из разных деталей.

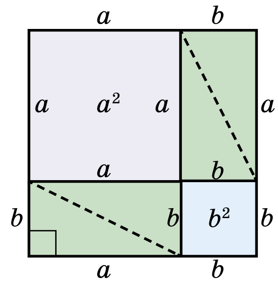


Рис. 4, *в*

Покажем, как решается задача 6 с помощью теоремы Пифагора. Правый отрезок – это гипотенуза c прямоугольного треугольника с катетами $a=6$ и $b=1$. Тогда $c^2=a^2+b^2=36+1=37$, откуда $c=\sqrt{37}$.

По ходу решения задач этой статьи мы нарисовали квадраты с площадями 1, 2, 5, 10, 13, 37, ... Вообще, при каких n квадраты площади n можно нарисовать с вершинами в узлах сетки, а при каких нельзя? Например, нельзя при n, равных 3, 6, 7, 11, 12 – это можно доказать с помощью теоремы Пифагора перебором длин катетов. Но перебором не получится показать, как устроены *все* такие n... Это вопрос сложный, ответ на него даёт теорема Ферма–Эйлера.[1]

Подумайте самостоятельно над такими задачами:

8. Из квадрата 11×11 легко вырезать квадрат площади 100 с вершинами в узлах сетки. Как вырезать из него квадрат площади 101 с вершинами в узлах?

9. Нарисуйте пять различных прямоугольников площади 10 с вершинами в узлах сетки.

10. У Вики есть четыре фигурки, у Алины – квадрат, а у Полины – квадрат другого размера. Объединившись, Алина и Вика могут сложить квадрат, используя все свои пять фигурок. Может ли оказаться, что Полина и Вика также смогут сложить квадрат, используя все свои пять фигурок? (Квадраты складываются без просветов и наложений.)

11. Вершины треугольника на рисунке 5 находятся в центрах клеток. Найдите его углы.

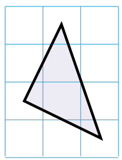


Рис. 5

12. Крест на рисунке 6 разрежьте:

а) на пять частей, из которых можно сложить квадрат;

б) на четыре части, из которых можно сложить квадрат.

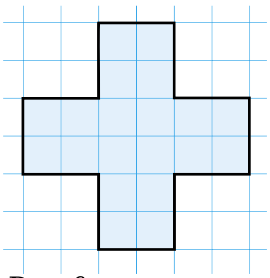


Рис. 6

13. Даны числа a и b одинаковой чётности. Докажите, что существует квадрат площади $\frac{a^2+b^2}{2}$ с вершинами в узлах сетки.

Замечание. В конце номера приведены три идеи, помогающие решить эту задачу. Так что можно не останавливаться, придумав одну!

[1]Её формулировку и доказательство можно прочитать, например, в «Кванте» № 3 за 1999 год, см. сайт kvant.ras.ru

Художник Алексей Вайнер