НАШ КОНКУРС, II ТУР

(«Квантик» № 10, 2019)

6. *Каких чисел, все цифры которых различны, больше: девятизначных или десятизначных?*

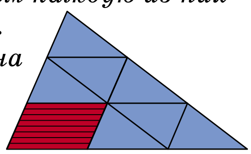
Ответ: их поровну. В каждом девятизначном числе с различными цифрами есть ровно одна неиспользованная цифра. Приписав её в конец, получим десятизначное число с различными цифрами. Этот способ разбивает искомые числа на пары (девятизначное, десятизначное), и каждое искомое число попадает ровно в одну из пар.

7. *У Квантика есть две квадратные шоколадки, первая – размером 10×10, вторая – размером 11×11. Чтобы разломать первую шоколадку на дольки 1×1, Квантику требуется 1 минута и 39 секунд. Какое время ему потребуется, чтобы разломать на дольки 1×1 вторую шоколадку? На каждый разлом Квантик тратит одно и то же время и за раз ломает какой-то один из имеющихся кусков на две части.*

Ответ: 2 минуты. Первую шоколадку Квантик разделил на 100 кусков, и с каждым разломом он увеличивал число кусков на 1. Значит, Квантик сделал $100-1=99$ разломов, потратив 99 секунд, то есть он тратит на разлом одну секунду. Во второй шоколадке $11^2=121$ долек, и тут понадобится 120 разломов, то есть 2 минуты.

8. *Барон Мюнхгаузен рассказывал:*

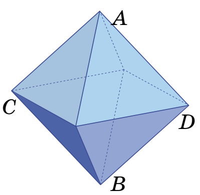
– Я сумел разрезать произвольный треугольник на две части, а потом каждую из них разрезал на 7 равных частей.



Могут ли слова барона быть правдой?

Ответ: да. Пример см. на рисунке.

9. *Многогранник, изображённый на рисунке, называется октаэдром; у него 6 вершин, 8 треугольных граней и 12 рёбер. В каждой вершине октаэдра поместили лампочку и зажгли одну из них. Далее, за ход можно выбрать любую грань и изменить состояние (потушить, если горит, и зажечь, если не горит) всех лампочек на ней. Можно ли за несколько ходов зажечь все лампочки?*



Ответ: нет. В каждой паре противоположных лампочек за ход меняет своё состояние ровно одна. Значит, в паре (A, B), где A – изначально зажжённая лампочка, после каждого чётного хода не горит одна лампочка (см. рисунок). А в паре (C, D) – не горит одна лампочка после каждого нечётного хода. Значит, после каждого хода какая-то лампочка не горит.

10. *Возьмём любое натуральное число, например, 2019. Составим второе число, которое показывает, сколько и каких цифр (в порядке возрастания) содержит исходное число. Получится 10111219, что означает «один нуль, одна единица, одна двойка и одна девятка». На основе второго числа по тому же принципу образуем третье число 10511219, потом – четвёртое 1041121519, и т. д.*

а) Квантик убеждён, что с какого бы числа ни начать, в получившейся последовательности какое-то число непременно встретится дважды. Ноутик считает, что не обязательно – возможна последовательность, в которой все числа различны. Кто прав?

б) Могут ли в такой последовательности встретиться два одинаковых числа подряд?

Ответ: а) Квантик; б) могут.

а) Нам понадобится лемма:

в такой последовательности после каждого числа, в котором хотя бы 100 цифр, следует число с меньшим количеством цифр.

Из леммы получается, что в последовательности после любого числа с хотя бы 100 цифрами рано или поздно встретится число с менее чем 100 цифрами, поскольку количество цифр будет уменьшаться и в какой-то момент станет меньше 100. Тогда числа с менее чем 100 цифрами никогда не закончатся в нашей последовательности – иначе после последнего из них шли бы только числа с хотя бы 100 цифрами, что невозможно. Поэтому чисел с менее чем 100 цифрами в последовательности бесконечно много, а всего различных таких чисел конечное количество. Значит, какое-то из них повторится.

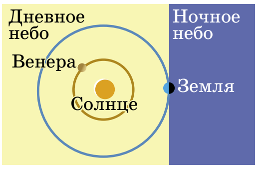
Докажем лемму. Пусть A – число из нашей последовательности, в нём k цифр, а в числе k в свою очередь n цифр. Следующее за A число нашей последовательности состоит не более чем из 10 групп вида «цифра и число, не превышающее k». Тогда в этом следующем числе не более $10(n+1)$ цифр, и мы хотели бы доказать при $k\geqslant 100$, что $10(n+1)<k$, то есть $n+1<\frac{k}{10}$. Так как $n+1\leqslant 2n$, достаточно доказать, что $n<\frac{k}{20}$.

Осталось проверить условие: *для любого числа $k\geqslant 100$ количество цифр в числе k не превышает $\frac{k}{20}$*. Для чисел от 100 до 119 условие, очевидно, выполнено (так как $3 < 5$). Любое другое число, большее 100, получается из какого-то числа от 100 до 119 прибавлением нужного количества двадцаток. При каждом таком прибавлении количество цифр числа k увеличивается не более чем на 1, а отношение $\frac{k}{20}$ увеличивается ровно на 1, поэтому условие не нарушается.

б) Да. Например, после числа 22 снова будет идти 22. Другой пример: 31331415.

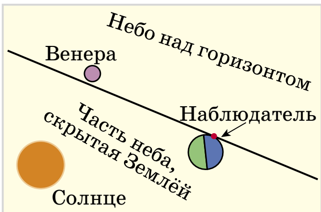
ПОЧЕМУ ВЕНЕРА ВИДНА НОЧЬЮ?

(«Квантик» № 11, 2019)



Почему Квантик назвал схему жульнической? Да, масштабы на ней не соблюдены: Земля и Венера слишком велики по сравнению с Солнцем, а Солнце слишком велико по сравнению с орбитами Земли и Венеры. Но важнее другое: «ночное небо», хоть и выглядит правдоподобно, изображено там неправильно. Почему?

Ночь на Земле стоит на всей её неосвещённой половине. И какое небо мы увидим ночью, зависит от того, где мы находимся. Если мы в противоположной от Солнца точке Земли, правильная картинка будет и в самом деле довольно похожа на картинку, приведённую Ноутиком.



Но если мы близко к границе между днём и ночью, картинка может выглядеть примерно так, как на рисунке справа. И мы увидим Венеру, хотя у нас будет ночь!

Венера примерно в полтора раза ближе к Солнцу, чем Земля, и для земного наблюдателя Венера и Солнце располагаются на небе не слишком далеко друг от друга. Но увидеть Венеру можно довольно часто: утром, когда она уже взошла, а Солнце – ещё нет, и вечером, когда Солнце уже зашло, а Венера – ещё нет. Поэтому древние астрономы называли Венеру «Утренней звездой» и «Вечерней звездой» (и даже долгое время считали, что это две разные звёзды).

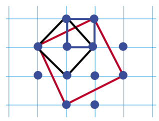
ВСЕ ХОТЯТ ЗАЧЁТ

Пусть каждый называет такое число: количество тех, кто уже получил оценку «сдал», плюс количество ещё не отвечавших студентов. Тогда либо все сдали, либо последний, кто не сдал, верно назвал итоговое число сдавших.

ВОРЫ НА СЛОВАХ

Слово *восхитить* раньше означало то же, что и *похитить*. Называя что-то *восхитительным*, мы как будто говорим, что оно нас захватывает, уносит.

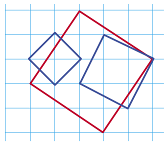
КВАДРАТЫ НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ



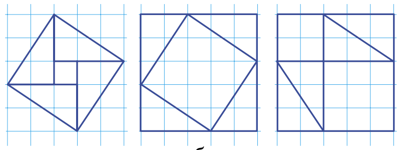
1. Есть 5 квадратов, таких же как синий, 4 – как чёрный и 2 – как красный.

2. Видимо, потому что в сетке (не математической, а рыболовной, например) нити связаны узлами.

3.



4.



а *б* *в*

6. Можно провести отрезок длины 6.

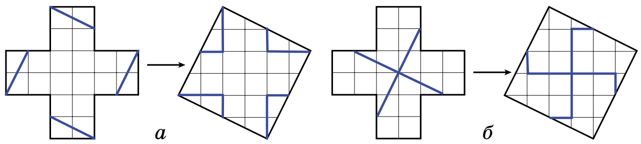
8. Отрежем от углов прямоугольные треугольники с катетами 1 и 10.

9. Прямоугольники 1×10 и 2×5, квадрат площади 10 и ещё два прямоугольника: составленный из 5 квадратов площади 2 и составленный из 2 квадратов площади 5.

10. Да, можно взять наборы фигурок из пунктов а) и б) задачи 4.

11. 45°, 45°, 90°. Этот треугольник – половина квадрата.

12. См. рисунки.



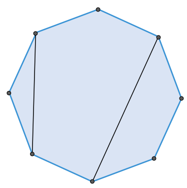
а *б*

13. *Идея 1:* строим квадрат площади $a^2 + b^2$ и берём середины его сторон (там будут узлы!).

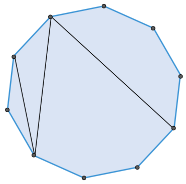
Идея 2: применить теорему Пифагора к треугольнику с катетами $(a-b)/2$ и $(a+b)/2$.

Идея 3: возьмём квадраты с общим центром и идущими по сетке сторонами a и b; продлим стороны меньшего до пересечения со сторонами большего; эти точки будут вершинами квадрата.

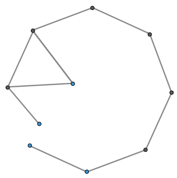
XIV ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР. Избранные задачи



1. а) Ответ: 10. Пример см. на рисунке. Кольцевой маршрут из 8 дорог уже даёт 8 дорог. Добавив к нему ещё одну дорогу, мы получим максимум два новых кольцевых маршрута, то есть 9 дорог не хватит.

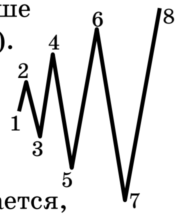


б) Ответ: 13. Пример см. на рисунке. Кольцевой маршрут из 10 дорог уже даёт 10 дорог. Добавим ещё две. Каждая в отдельности даёт максимум два новых кольцевых маршрута. Обе эти дороги вместе входят максимум в два кольцевых маршрута. Итого кольцевых маршрутов не более $1+2+2+2\leqslant 7$, так что 12 дорог не хватит.



2. Да. Проверьте, что карта на рисунке справа подходит.

3. Ответ: 20. Пусть d_k девочек и m_k мальчиков дарили «Коровку», d_b девочек и m_b мальчиков дарили «Белочку». Надо найти максимум суммы $d_k+m_k+d_b+m_b$. Каждая пара, подарившая друг другу разные конфеты, даёт одинаковый вклад в суммарное число подаренных «Белочек» и суммарное число подаренных «Коровок». Значит, пар, подаривших друг другу «Белочки», столько же, сколько пар, подаривших друг другу «Коровки», то есть $d_k\cdot m_k=$ $=d_b\cdot m_b$. При этом $d_b+m_b=7$. Слагаемые тут натуральные, то есть это либо $1+6$, либо $2+5$, либо $3+4$ (в каком-то порядке). Произведение $d_b\cdot m_b$ при этом равно соответственно 6, 10 и 12, и оно же равно $d_k\cdot m_k$. Максимальная сумма d_k+m_k получается для третьего случая и равна 13.



4. Пусть, например, 2-й выше 1-го (случай «ниже» аналогичен). Тогда последовательно получаем, что 3-й ниже 1-го, 4-й выше 2-го, 5-й ниже 3-го, и т.д. – рост идёт зигзагом, как на рисунке, и в шеренге «чётных» рост увеличивается, а в шеренге «нечётных» – уменьшается.

5. Ответ: 33. Занумеруем гномов подряд числами от 1 до 99 по часовой стрелке. Заметим, что в последовательности 1, 51, 2, 52, 3, 53, ..., 48, 98, 49, 99 среди любых трёх подряд идущих гномов любые два стоят на исходном круге либо рядом, либо через 48 гномов между ними. Поэтому в шляпах максимум треть всех гномов. Дав шляпу гномам с номерами, кратными 3, получим нужный пример (проверьте!).

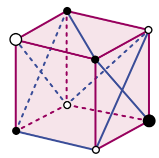
6. Ответ: 1010. Хотя бы с одной из сторон от фишки не меньше 1009 клеток. Поэтому если $n\leqslant 1009$, то при любом $k\leqslant n$ Вася сможет сделать ход. Пусть $n=1010$. Если клетка стоит в центре, Петя выбирает $k=1010$ и выигрывает. Если клетка не в центре, пусть Петя всегда называет число клеток, на которое надо сместиться, чтобы попасть в центр. Вася будет вынужден двигаться в одну сторону от центра, приближаясь к краю, но в какой-то момент сделать ход в сторону края уже не хватит места, и он пойдёт в центр.

7. *Указание.* Запишем оба числа и их сумму в двоичной системе. Сумма будет иметь вид 111...11 (число из одних единиц), а каждое из чисел – несколько групп единиц, разделённых группами нулей. Пусть каждый мудрец подымет левую руку, если в его числе количество групп единиц чётно, и правую – если нечётно.

8. Можно считать, что все буквы в строках различны (подумайте, почему). Занумеруем буквы в строке A числами 1, 2, 3, ... в таком порядке и будем оперировать номерами. В строке B, достижимой из A, числа как-то перемешаны. Будем получать A из B : берём очередное число из B, двигаем влево (если нужно) и ставим так, чтобы все уже взятые числа стояли по возрастанию. Первое число из B уже стоит по возрастанию. Пусть мы расставили по возрастанию несколько первых чисел из B, а очередное число x поставить не можем. Тогда мы сейчас стоим на таком месте в уже полученной строке возрастающих чисел, что сразу за нами стоит число y, меньшее x, но и перед нами стоит (ещё меньшее!) число z, поставленное на предыдущем шаге:

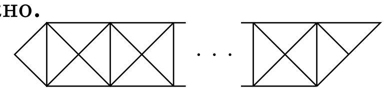
..., z, курсор (хотим поставить x), y, ...

Значит, в строке B эти буквы идут в порядке ... , y, ..., z, x, а в строке A идут по возрастанию: ... z, ... , y, ..., x. Но тогда B недостижима из A: поставив z, мы когда-то сместимся левее z, чтобы поставить y, и не сможем поставить x правее z.



9. Ответ: 6. Пример см. на рисунке. Так как вершин 8, в пути 7 отрезков. Если все они – диагонали, мы сможем дойти из начальной белой точки лишь до трёх других белых точек (см. рис.), а в чёрные не попадём.

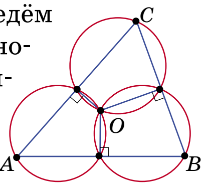
10. Ответ: можно. Пример см. на рисунке.



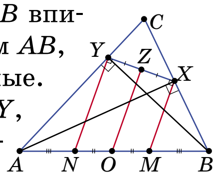
11. Ответ: нет. Пусть есть три палочки по 10 см. Отломим от первых двух куски по 9 см, а от третьей – 1 см. Из кусков 9 см, 9 см, 1 см можно сложить треугольник, а из оставшихся – нельзя по неравенству треугольника $(1+1<9)$.

12. Ответ: 3. Двух кругов не хватит, если вырезать правильный треугольник, вписанный в круг радиуса 2. Длина стороны треугольника будет больше 2, и в каждый круг радиуса 1 попадёт максимум одна вершина, а вершин три.

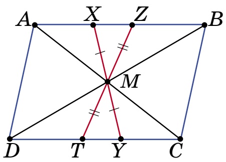
Трёх кругов хватит. Проведём из центра O описанной окружности треугольника ABC перпендикуляры к его сторонам. Они попадут в середины сторон и разделят ABC на три четырёхугольника, каждый из которых вписан в круг, в два раза меньший описанного круга треугольника, то есть в круг радиуса не больше 1.



13. Четырёхугольник $AYXB$ вписан в окружность с диаметром AB, так как углы AYB и AXB прямые. Перпендикуляр к хорде XY, проведённый через её середину Z, проходит через центр O окружности. Тогда $OM=ON$, так как $ZX=ZY$. Но O – середина AB, откуда и $AN=MB$.



14. Пусть M – точка пересечения диагоналей $ABCD$, XY и ZT – данные отрезки (см. рис.). Треугольники XMZ и YMT равны по первому признаку, откуда равны углы XZM и YTM, то есть стороны AB и CD параллельны. Но тогда равны треугольники AMZ и CMT (по второму признаку), откуда $AM=MC$, и аналогично $DM=MB$. Значит, диагонали $ABCD$ точкой пересечения делятся пополам, то есть $ABCD$ – параллелограмм.



15. а) Ответ: да. Проведя две перпендикулярные прямые, мы сможем заключить фигуру в прямоугольник, на каждой стороне которого (быть может, в вершинах) есть точки фигуры. Если фигура – отрезок, она обязательно будет диагональю этого прямоугольника. Проведём прямые, перпендикулярные диагоналям. Если проекция на одну из этих прямых будет точкой, фигура – отрезок, иначе – треугольник.

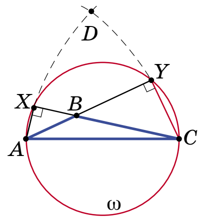
б) Ответ: да. *Указание.* Назовём выпуклый многоугольник опорным для фигуры, если фигура лежит внутри него и на каждой его стороне есть точка фигуры. Начав с опорного прямоугольника, можно проверять, лежит ли в данной его вершине вершина фигуры, и если нет – «срезать» эту вершину, увеличивая число сторон опорного многоугольника (а вершин в нашей фигуре не меньше, чем половина сторон опорного).

16. Ответ: от 60° до 90° включительно.

Наибольший угол треугольника всегда не меньше 60°. Заметим, что проекции остроугольного треугольника равны по длине его сторонам, а среди проекций тупоугольного одна проекция строго больше двух других (проекция наибольшей стороны).

Для $60° \leqslant \alpha < 90°$ берём равнобедренный треугольник с двумя наибольшими углами α. Две его наибольшие проекции одной длины, и мы поймём, что он остроугольный и восстановим его.

Пусть угол B треугольника ABC тупой. Построим на наибольшей стороне AC как на диаметре окружность ω (см. рис.). Проекция ABC на прямую AB равна AY, а на BC – равна CX. Окружность с центром A и радиусом AY и окружность с центром C и радиусом CX пересекаются вне ω, пусть D – одна из точек пересечения. Тогда ADB остроугольный и имеет те же длины проекций, что и ACB.



Прямоугольный треугольник восстанавливается по теореме Пифагора.

17. Да. Например, годится $a=1003$ – получится $(1003^2-2)^2$, и $a=1001\cdot1003\cdot1005+4$ – получится $(1001\cdot1003\cdot1005+2)^2$.

18. Пусть прямые горизонтальны. Прыгая на 13 с прямой на прямую, мы сдвигаемся по горизонтали на 12 (так как $12^2+5^2=13^2$). Надо сделать нечётное число таких сдвигов, чтобы оказаться на другой прямой, а суммарный сдвиг должен быть нулевым. Порядок прыжков не важен, и нет смысла делать прыжок и такой же прыжок «обратно», поэтому можно считать, что мы n раз сдвинулись на 12 вправо, а потом m раз – на 13 влево. Тогда $12n=13m$, откуда n делится на 13, и $n>0$ (ведь n нечётно). Значит, $n\geqslant13$, откуда $m\geqslant12$ и $n+m\geqslant25$.

Пример на 25 прыжков: 12 раз влево вдоль прямой и 13 раз с прямой на прямую вправо.

19. Ответ: при всех натуральных $N>2$.

Если N нечётно, возьмём $N-2$ единиц и числа 2 и N. Их НОК и сумма равны $2N$.

Если $N>2$ чётно, возьмём $N-3$ единиц и числа 2, 2 и $N+1$. Их НОК и сумма равны $2N+2$.

Если $N=2$, то сумма двух чисел делится на каждое, но больше каждого хотя бы в 2 раза, откуда числа равны, а тогда НОК меньше суммы.

20. Ответ: при $n=1$ и всех чётных n. *Указание*: $a_n=\frac{n\cdot n!}{2}$ и $a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}=\frac{n!}{2}$ при $n>1$ (для $n=2$ формулы верны; так как $\frac{n!}{2}+\frac{n\cdot n!}{2}=\frac{(n+1)!}{2}$, обе формулы будут верными при увеличении n).