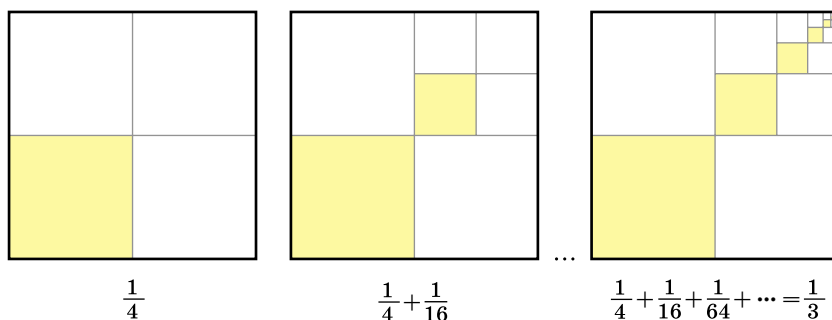


Материал подготовил
Григорий Мерзон

КАРТИНКИ ВЫЧИСЛЯЮТ БЕСКОНЕЧНЫЕ СУММЫ

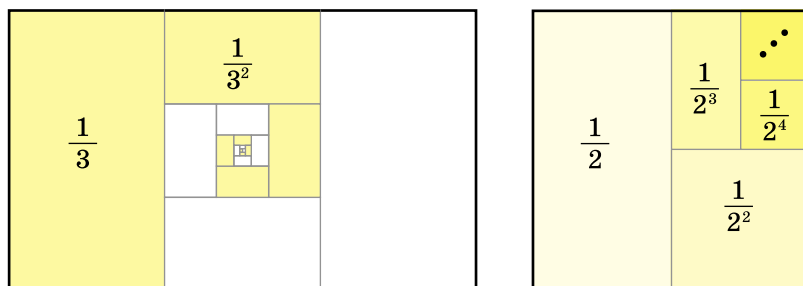
Как найти сумму нескольких слагаемых? Странный вопрос – бери и складывай одно за другим! Но что делать, если речь идёт о сумме *бесконечного* числа слагаемых? Оказывается, иногда полезно эту сумму... нарисовать.

Начнём с суммы $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$ (это сумма *геометрической прогрессии*: каждое следующее слагаемое в 4 раза меньше предыдущего). Возьмём квадрат единичной площади. Закрасим его четверть, потом добавим четверть от четверти...

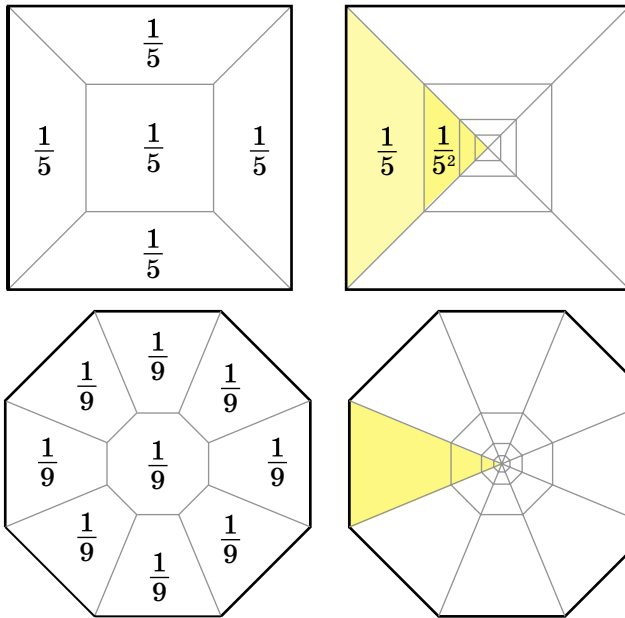


Видно, что *в итоге* закрашена ровно $\frac{1}{3}$ площади квадрата – жёлтая часть имеет такую же площадь, как и каждая из двух белых частей.

Можно похожим образом найти суммы $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$ и $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ (поняли, чему эти суммы равны?)



Есть и довольно общий способ подсчитать сумму геометрической прогрессии $\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \dots$ для любого целого $q > 1$. Ниже он показан для $q = 5$ и $q = 9$.



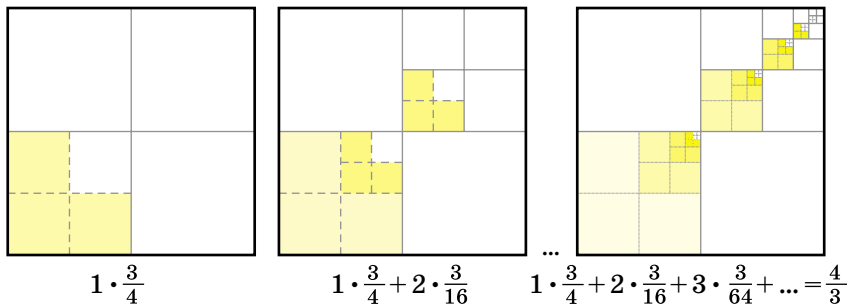
СМОТРИ!



Художник Алексей Вайнер

Мы начинаем с правильного $(q - 1)$ -угольника, рисуем внутри следующий правильный $(q - 1)$ -угольник, имеющий площадь в q раз меньше предыдущего – то есть такую же, как каждая из $(q - 1)$ примыкающих к нему трапеций, и т.д. Видно, таким образом, что эта сумма равна $\frac{1}{q-1}$.

Можно геометрически найти и некоторые более сложные суммы. Например, ниже объясняется, что $1 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{3}{16} + 3 \cdot \frac{3}{64} + \dots = \frac{4}{3}$ (большой квадрат имеет площадь 4).



Теперь мы знаем, чему равна сумма $\frac{1}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{3}{q^3} + \dots$ для $q = 4$. Быть может, вы придумаете геометрические вычисления таких сумм для других q ? Подумайте и про другие суммы – например, $\frac{1}{q} + \frac{3}{q^2} + \frac{6}{q^3} + \frac{10}{q^4} + \dots$ (если в знаменателе q^n , то в числителе стоит сумма всех натуральных чисел от 1 до n).