# XLI ТУРНИР ГОРОДОВ, ОСЕННИЙ ТУР, 8–9 КЛАССЫ

13 и 27 октября 2019 года состоялся осенний тур XLI Турнира Городов – международного математического соревнования для школьников. Приводим базовый и сложный варианты для 8–9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов (баллы за пункты одной задачи суммируются).

## Базовый вариант

**1 (4 балла).** Фокусник выложил в ряд колоду из 52 карт (рубашками вверх) и объявил, что 51 из них будут выкинуты со стола, а останется тройка треф. Зритель на каждом шаге говорит, какую по счёту с края карту надо выкинуть, а фокусник выбирает, с левого или с правого края считать, и выкидывает соответствующую карту. При каких начальных положениях тройки треф фокусник может гарантировать успех фокуса? (Где лежит тройка треф, фокусник знает.)

*Алексей Воропаев*

**2 (4 балла).** Дана окружность $\omega$ с центром $O$ и две её различные точки $A$ и $C$. Для любой другой точки $P$ на $\omega$ отметим середины $X$ и $Y$ отрезков $AP$ и $CP$ и построим точку $H$ пересечения высот треугольника $OXY$. Докажите, что положение точки $H$ не зависит от выбора точки $P$.

*Артемий Соколов*

**3 (4 балла).** В каждой клетке полоски длины 100 стоит по фишке. Можно за 1 рубль поменять местами любые две соседние фишки, а также можно бесплатно поменять местами любые две фишки, между которыми стоят ровно три фишки. За какое наименьшее количество рублей можно переставить фишки в обратном порядке?

*Егор Бакаев*


# XLI ТУРНИР ГОРОДОВ,
## ОСЕННИЙ ТУР, 8-9 КЛАССЫ


**4 (5 баллов).** Даны целые числа $a_1$, $a_2$,..., $a_{1000}$. По кругу записаны их квадраты $a_1^2$, $a_2^2$,..., $a_{1000}^2$. Сумма любых 41 подряд идущих чисел на круге делится на $41^2$. Верно ли, что каждое из чисел $a_1$, $a_2$,..., $a_{1000}$ делится на 41?

*Борис Френкин*

**5 (6 баллов).** У Васи есть неограниченный запас брусков $1\times1\times3$ и уголков из трёх кубиков $1\times1\times1$. Вася целиком заполнил ими коробку $m\times n\times k$, где $m$, $n$ и $k$ – целые числа, большие чем 1. Докажите, что можно было обойтись лишь уголками.

*Михаил Евдокимов*

### Сложный вариант

**1.** Назовём *сложностью* целого числа $n>1$ количество сомножителей в его разложении на простые (например, сложность чисел 4 и 6 равна 2). Для каких $n$ все числа между $n$ и $2n$ имеют сложность

**а) (2 балла)** не больше, чем у $n$;

**б) (2 балла)** меньше, чем у $n$?

*Борис Френкин*

**2 (7 баллов).** Два остроугольных треугольника $ABC$ и $A_1B_1C_1$ таковы, что точки $B_1$ и $C_1$ лежат на стороне $BC$, а точка $A_1$ лежит внутри треугольника $ABC$. Пусть $S$ и $S_1$ – соответственно площади этих треугольников. Докажите, что

$$\frac{S}{AB+AC}>\frac{S_1}{A_1B_1+A_1C_1}.$$

*Наири Седракян, Илья Богданов*

**3 (7 баллов).** Есть 100 внешне неразличимых монет трёх типов: золотые, серебряные и медные (каждый тип встречается хотя бы раз). Известно, что золотые весят по 3 грамма, серебряные – по 2 грамма, медные – по 1 грамму. Как на чашечных весах без гирек гарантированно определить тип у всех монет не более чем за 101 взвешивание?

*Владислав Новиков*

**4 (7 баллов).** Из центра $O$ описанной окружности треугольника $ABC$ опустили перпендикуляры $OP$ и $OQ$ на биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине $B$. Докажите, что прямая $PQ$ делит пополам отрезок, соединяющий середины сторон $CB$ и $AB$.

*Артемий Соколов*

**5 (8 баллов).** Назовём пару $(m, n)$ различных натуральных чисел $m$ и $n$ *хорошей*, если числа $mn$ и $(m+1)\cdot(n+1)$ – точные квадраты. Докажите, что для каждого натурального $m$ существует хотя бы одно такое натуральное $n > m$, что пара $(m, n)$ хорошая.

*Юрий Маркелов*

**6 (8 баллов).** У Пети было несколько сторублёвок, других денег не было. Петя стал покупать книги (каждая книга стоит целое число рублей) и получать сдачу мелочью (монетами в 1 рубль). При покупке дорогой книги (не дешевле 100 рублей) Петя расплачивался только сторублёвками (минимальным необходимым их количеством), а при покупке дешёвой (дешевле 100 рублей) расплачивался мелочью, если хватало, а если не хватало – сторублёвкой. К моменту, когда сторублёвок не осталось, Петя потратил на книги ровно половину своих денег. Мог ли Петя к этому моменту потратить на книги хотя бы 5 тысяч рублей?

*Татьяна Казицына*

**7 (10 баллов).** На одной стороне плоской деревянной пластинки нарисован клетчатый квадрат, в нём 102 клетки намазаны чёрной краской. Петя, используя пластинку как печать, 100 раз приложил её к белому листу, и каждый раз эти 102 клетки (и только они) оставляли чёрный отпечаток на бумаге. Мог ли в итоге на листе получиться квадрат $101 \times 101$, все клетки которого, кроме одной угловой, чёрные?

*Александр Грибалко*


Художник Сергей Чуб