Лев Емельянов

Просто мне нужно объяснить... Но не просто объяснить, а чтобы ещё стало понятно!

Е. Гришковец
«Одновременно»

ЧЕМУ РАВНА СУММА УГЛОВ?

Разговор покупателя с продавцом в магазине «Ткани».

– Здравствуйте! Я шью дома и сама делаю выкройки. Для этого использую угольник с различными углами. Мне нужны чаще всего 90, 60 и 45 градусов, но они у меня в разных угольниках. Приходится перекладывать. Нет ли у вас угольника, в котором были бы именно эти углы?

– Вы знаете, среди тех, что я вижу, нет, но вы заходите, такие должны на днях привезти.

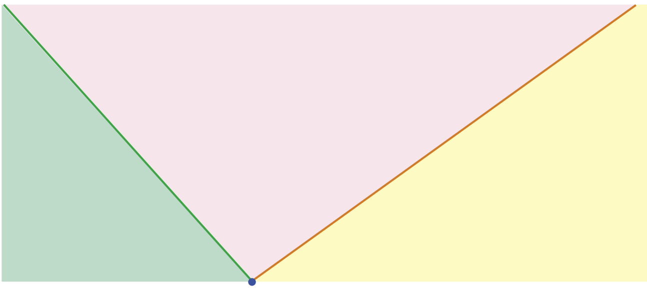
– Большое спасибо, обязательно зайду.

Для математического уха разговор выглядит комично. То, что сумма углов треугольника равна 180°, знают даже школьники, не очень увлечённые математикой. А что такое 180° и почему именно 180? Ясно, скажет умный школьник, это половина от 360, то есть полного оборота.

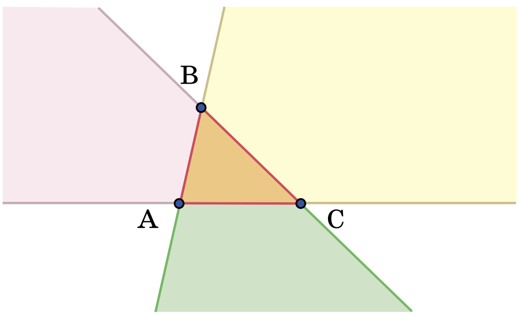
Невозможно точно сказать, почему окружность была разбита на 360 одинаковых частей и когда это произошло. То ли это персы придумали, у которых год длился 360 дней, то ли вавилоняне, которым удобно было делить окружность на 6 равных частей с помощью равностороннего треугольника.

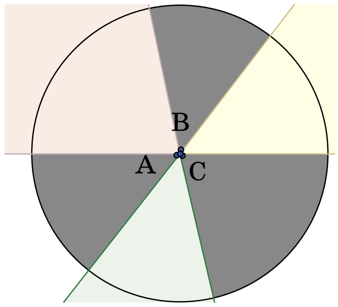
Была, правда, попытка ввести более логичную, с точки зрения современных представлений о счёте, шкалу для угловых мер. Она делила окружность на 400 равных частей – *градов*. В этой шкале величина прямого угла равнялась 100 градам. Однако шкала эта не прижилась. Трудно одним желанием изменить пятитысячелетнюю историю цивилизации. Да впрочем, какая разница, в чём мерить, хоть в попугаях, главное – понять, что угол – это некоторая доля от полного оборота.

Почему же сумма углов любого треугольника равна в точности половине полного оборота? Давайте представим себе, что у нас есть три прожектора. Каждый освещает внутренность некоторого угла до бесконечности (жить мы будем временно в двумерном мире). Если мы, стоя в одной точке, включим три прожектора (зелёный, розовый и жёлтый на рисунке), сумма «световых углов» которых равна 180°, и направим их без наложений освещаемой площади, то осветим ровно половину нашего двумерного пространства.



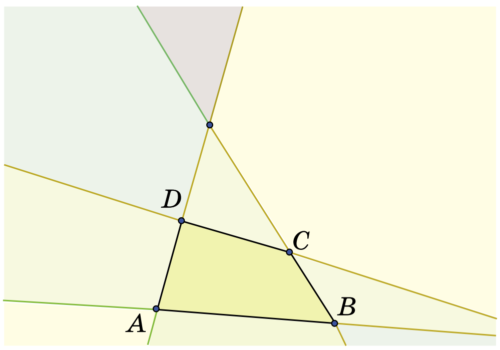
Теперь рассмотрим произвольный треугольник и в вершинах его поставим трёх помощников (Али, Бен и Сирил по буквам вершин, но можно попросить Анну, Варвару и Светлану), доверив им по прожектору. Каждый помощник должен осветить внутренность треугольника лучами света, которые выходят из вершины и продолжаются до бесконечности. Таким образом, каждый прожектор будет освещать внутренность своего угла и не будет освещать внутренность такого же угла, вертикального выбранному. При этом каждая точка плоскости либо попадёт внутрь освещённого угла, либо не будет освещена, попав в вертикальный угол к углу треугольника. Точки же самого треугольника будут освещены трижды. Теперь давайте посмотрим на нашу частично освещённую плоскость с большой высоты (мы-то, как люди трёхмерные, имеем на это право). Если закрыть глаза на небольшой участок перекрытия внутри треугольника, то нетрудно понять, что мы осветили «ровно» половину плоскости. Из чего и можно заключить, что **сумма углов произвольного треугольника равна 180°!**





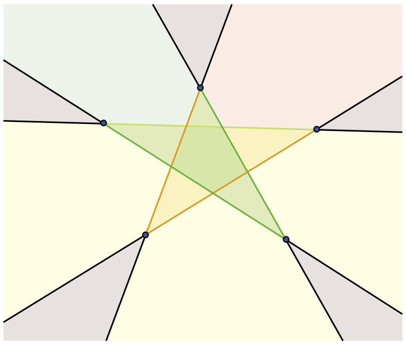
Если наше маленькое жульничество внутри треугольника режет глаз, давайте отойдём далеко-далеко от плоскости и забудем, что где-то стоят наши помощники. Нарисуем окружность огромного радиуса с центром где-то внутри треугольника. Какая часть окружности освещена? Ровно (почти) половина. И чем больше радиус нашей окружности, тем меньше будут отличаться освещённая и тёмная части окружности. Ведь каждой светлой дуге будет в пару поставлена такая же тёмная.

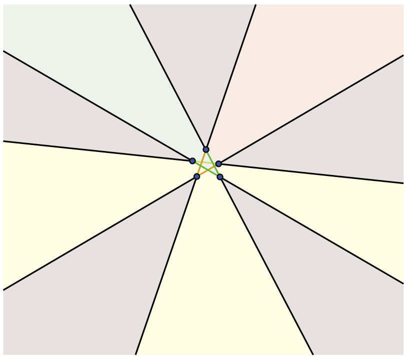
Не будем останавливаться на сумме углов треугольника, а попробуем развить эту идею. Самое естественное продолжение – четырёхугольник. Нетрудно понять, что четыре помощника, выполняя аналогичное задание, осветят всю плоскость, что значит: **сумма углов четырёхугольника равна 360°**. Стоп! Давайте не торопиться, отойдём подальше. Что мы видим? Ужас! Некоторые точки плоскости вообще не освещены. Всё пропало? Не будем паниковать преждевременно. Продолжим наши прямые до бесконечности. На рисунке серым цветом закрашена неосвещённая часть плоскости. Посмотрим внимательно на вертикальный с ней угол. Он освещён, конечно, но освещён дважды! А значит, и здесь всё сходится. Так и должно быть, ведь четырёхугольник можно просто разрезать на два треугольника. Думаем дальше.

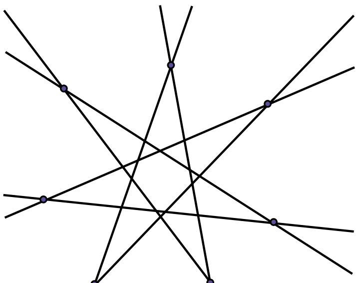


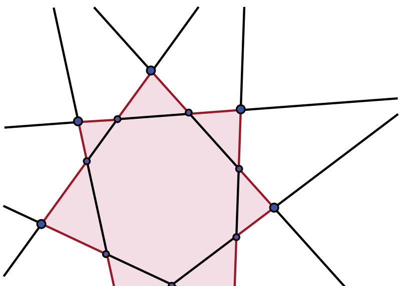
Нарисуем пятиконечную звёздочку (не обязательно правильную). Теперь позовём пять фонарщиков, поставим их в вершинах «лучиков» нашей звёздочки, и пусть каждый освещает внутренность того угла, в котором стоит. Соответственно, вертикальный угол освещён не будет. Что мы видим? Картина почти такая же, как у треугольника. Половина плоскости светлая, половина тёмная, а значит, **сумма углов пятиконечной звезды равна 180°!**

При этом мы нигде не пользовались какими-то особенностями формы этой звёздочки. Более того, а где мы считали количество углов? Давайте внимательно посмотрим на 7-конечную звезду. А потом на 2021-конечную (нарисовать непросто, а представить можно). Что изменится для суммы? Да ничего – половина светлого, половина тёмного. Правда, для большого числа углов нужно «правильно» рисовать звёздочку. Например, для семиугольной конструкции можно привести два примера. Подсчитайте самостоятельно сумму для «более тупоугольной» звёздочки.

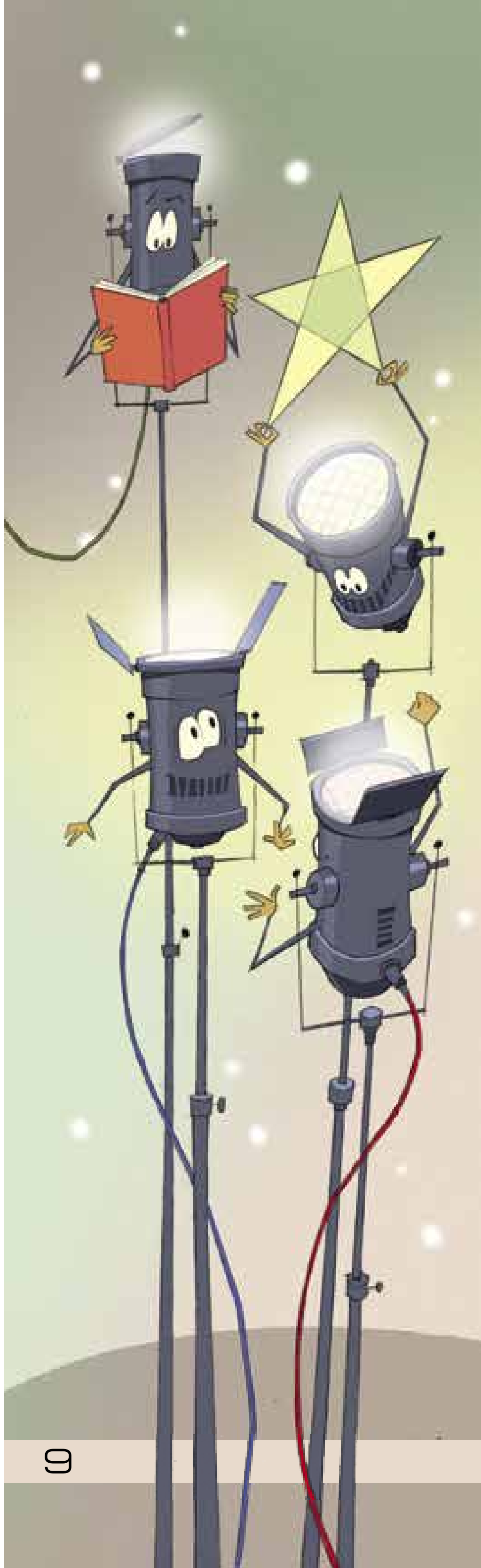






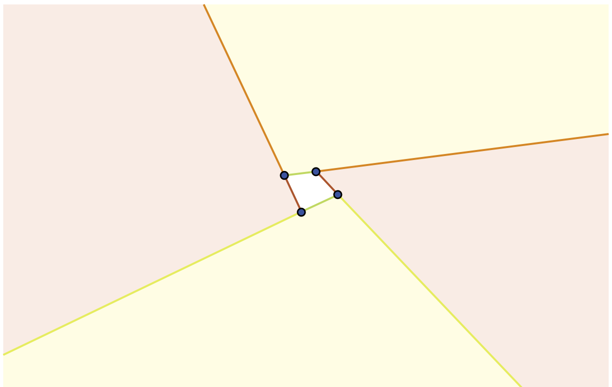


Теперь давайте немного развернём наших фонарщиков и дадим им задание осветить один из своих внешних углов. Для начала позовём четверых, поставим их в вершинах выпуклого четырёхугольника.



Художник Алексей Вайнер

Нетрудно понять, что они осветят всё, кроме самого четырёхугольника. Удаляясь от них, мы поймём, что **сумма внешних углов выпуклого четырёхугольника равна 360°.**



Также при достаточном удалении мы забудем о количестве помощников, а когда вспомним, поймём, что это совершенно неважно. Сколько бы их ни было, плоскость будет освещена полностью и без перекрытий. Из этого следует чрезвычайно важный и удивительный вывод: **сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°!**

Продолжая применять этот метод, можно получить и другие формулы для суммы углов. То есть если внимательно посмотреть на количество перекрытий, можно вывести формулу для суммы углов выпуклого многоугольника. Но даже без вывода становится понятно, почему сумма внутренних углов зависит от их количества, а сумма внешних нет. Попробуйте развить эту идею на случай невыпуклых многоугольников. Можно, немного поломав голову, найти сумму внутренних углов, а вот для суммы внешних надо сначала понять: что такое внешний угол невыпуклого многоугольника? Успехов в вашем исследовании!

P.S. А угольник 45°, 60° и 90°, оказывается, существует! Это специальный портновский угольник – треугольник, в котором сделаны треугольные дырки с другими углами. И речь в магазине «Ткани», оказывается, совсем не шла о сумме углов *треугольника*.